THÈSE

Générer les triangulations de la sphère de degré minimum cinq sans répétition ni test d'isomorphisme

Philippe Rolland
IRIN
Université de Nantes
44072 Nantes cedex 03
rue de la Houssinière
France
Rolland@Irin. Univ-Nantes. fr

10 mars 1997

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier mon directeur de thèse Monsieur le professeur émérite Jean Hardouin Duparc. Ses idées novatrices, sa rigueur scientifique et son soutien constants m'ont aidé à conjuguer exigence et enthousiasme tout au long de ce travail. Qu'il veuille trouver ici l'expression de ma gratitude.

Je remercie Messieurs les professeurs Reinhardt Euler et Jean-Luc Fouquet qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs pour cette thèse. Je les remercie du soin et de la précision avec lesquels ils ont jugé ce travail.

Je remercie Madame le professeur Christine Choppy pour le soin avec lequel elle a examiné ce manuscrit et d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie Monsieur le professeur Michael Griffiths de m'avoir accepté dans son équipe ; je lui suis très reconnaissant de la lecture attentive qu'il a fait de ma thèse, ainsi que des nombreux conseils aussi précis que pertinents qu'il a su me donner. Je suis honoré de le compter parmi les membres du jury.

Je remercie Monsieur le professeur Gunnar Brinkmann de l'Université de Bielefeld pour sa collaboration dans la partie énumération. Depuis notre première entrevue, à TW'95, ces conseils et son soutien durant les moments critiques ont été indispensables. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour l'ensemble de sa participation et pour son amitié.

Je remercie Monsieur le professeur Brendan McKay de l'Université Nationale d'Australie pour sa patience durant toutes les communications privées qui ont contribué à l'adaptation de son procédé d'énumération au cas des graphes $MPG5$.

Je remercie toute l'équipe IA pour l'encadrement scientifique de qualité dont j'ai pu bénéficier.

Je remercie très chaleureusement, et très amicalement pour leur disponibilité et leur gentillesse, Olivier Aristide Grange, Zoltàn Istenes, Philippe Lamarre, Emmanuelle Martienne, Pierre Tchounikine, et Francky Trichet.

Enfin, je me permets de rendre hommage à ma famille proche et lointaine, qui m'a fourni courage et confiance. Il y a Natacha [1] et Maya [2], mes parents [3] Bernard, Marie-Claire, ainsi que ma soeur Valérie. Ensuite vient Olivier Roney connu en classe de seconde à Recouvrance, ainsi que mon professeur de physique du lycée de Pont l'Abbé d'Arnoult.

1. Ventricule droit. Voir figure 1.
2. Axone 7, rez-de-chaussée, porte 12. Voir figure 2.
3. Ma trisomie du chromosome 21.

Tous deux ont participé à mon éveil, dans les meilleurs *sens*. Aussi Bá Thien DEPRAT mon maître de VOVINAM Việt Võ Đạo, pour la perception du courage, de la dévotion et aussi celle de l'énergie.

Je n'oublie pas, Monsieur ainsi que Madame BAUCHET, (appelé $Z^i_Z i$ et bi-$Z^i_Z i$) qui m'ont *élevé* par leur simplicité.

Merci aussi au V_{35} (resp. OM_1, 159_M, 85, 21 et 28), pour les précieux moments tirés (resp. pris) avec lui (eux).

Enfin je salue mes homonymes ainsi que moi-même [4].

4. Mare tranquillitaris.

Fig. 1 - *Photographie de Natacha.*

Fig. 2 - *Photographie de Maya.*

Table des matières

Table des figures, des algorithmes et des tableaux

Chapitre 1

Introduction

Les résultats présentés dans cette thèse concernent les triangulations de la sphère. Pas n'importe quelle triangulation puisque seules celles de degré minimum cinq nous intéresseront ; c'est-à-dire celles telles que tous les sommets possèdent au moins cinq voisins. Plus loin on expliquera les raisons de cette sélection.

Pour fixer l'objectif de ce document, on rappelle qu'un graphe est dit planaire si et seulement si il existe une carte, c'est-à-dire un ordonnancement des arêtes autour des sommets, qui permet de le dessiner sans intersection des arêtes, sur un plan ou une sphère. D'autre part un graphe est dit triangulé si et seulement si toutes ses faces sont des triangles et enfin une triangulation de la sphère est simplement un graphe planaire triangulé.

Ainsi, la génération de toutes les triangulations de la sphère de degré minimum cinq se ramène à la génération de tous les graphes planaires triangulés de degré minimum cinq.

Cette thèse présente un algorithme qui résoud ce problème sans répétition, ni test d'isomorphisme.

1.1 Pourquoi s'intéresser à ce problème ?

On s'intéresse au problème de génération des triangulations de la sphère de degré minimum cinq, d'une part parce qu'il répond partiellement à un problème ouvert et d'autre part parce qu'il est étroitement lié au théorème des quatre couleurs.

1.1.1 Réponse partielle à un problème ouvert

D. Avis [Avi94] rappelle que le problème consistant à générer sans répétition ni test d'isomorphisme toutes les triangulations de la sphère est ouvert. La génération de graphes par test d'isomorphisme signifie que tous ceux qui sont non isomorphes doivent être stockés.

Cette remarque permet de reformuler le problème ouvert comme étant celui de générer sans répétition ni stockage toutes les triangulations de la sphère.

1.1.2 Historique du théorème des quatre couleurs

L'un des problèmes centraux existant sur les graphes planaires est certainement le théorème des quatre couleurs.

Le problème consistant à prouver *à la main* ce théorème a occupé une très grande partie des recherches en théorie des graphes. T. L. Saaty et P. C. Kainen dans [SK77] citent K. O. May qui a rappelé en 1965 que l'origine de ce théorème n'est pas due à la concrétisation d'une série d'efforts individuels, mais à l'étincelle de l'esprit de Francis Guthries qui travaillait comme colorieur de cartes en Angleterre. Son frère Frederick communiqua ce qui était alors une conjecture au professeur A. De Morgan de l'Université de Londres en octobre 1852. Aussitôt A. De Morgan donnera du crédit à cette conjecture et l'enseignera à ses étudiants. Le 13 Juin 1878, apparaît la première publication de la conjecture dans le journal *The proceedings of London Mathematical Society* sous la plume du professeur A. Cayley. C'est alors la naissance d'un des plus fameux problèmes de l'histoire des mathématiques.

On rappelle ce théorème :

Théorème 1 *Soit G un graphe planaire. Le nombre chromatique de G est inférieur ou égal à quatre.*

Une coloration des sommets d'un graphe est l'affectation d'une couleur à tous les sommets du graphe, tel que deux sommets voisins, *i.e.* liés par une arête, n'ont pas la même couleur ; le nombre chromatique d'un graphe étant le nombre minimum de couleurs permettant une telle coloration.

La recherche d'une démonstration

Sans doute l'une des premières preuves a été proposée par A. B. Kempe dans [Kem79] en 1879. C'est P. J. Heawood dans [Hea90], en 1890, qui trouva son erreur.

Par la suite il y a eu de nombreuses contributions et sans être exhaustif on rappelle les plus importantes, [Ber48], [Hee69], et [Bir13].

La plupart des tentatives de démonstration du théorème utilisent la même technique : par exemple la tentative de A. B. Kempe en 1879, celle de K. Appel, W. Haken, J. Koch en 1977, et enfin celle de N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, R. Thomas en 1996.

Grossièrement dans cette technique on peut distinguer deux phases.

1. Une première phase, où l'on doit définir un ensemble complet de réductions ; c'est-à-dire une collection de sous-graphes planaires, telle que tout graphe planaire soit réductible à l'un de ces sous-graphes. Prouver que l'ensemble de ces réductions est complet est une tâche extrêmement délicate.

2. La seconde phase consiste à montrer comment une 4-coloration sur un graphe appartenant à l'ensemble des réductions peut induire une 4-coloration sur le graphe original.

La première preuve

La première preuve du théorème des quatre couleurs est due à K. Appel, W. Haken et J. Koch en 1977, dans [AHK77b], [AHK77c], et [AHK77a]. Cette preuve utilise 1482 configurations réductibles et a nécessité plus de 1200 heures de calcul sur trois ordinateurs.

Les raffinements

Une nouvelle preuve très récente de ce théorème, utilisant seulement 633 configurations réductibles, a été proposée par N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, et R. Thomas dans [RSST96b]. De cette preuve, les mêmes auteurs ont extrait un algorithme efficace de coloration des graphes planaires dans [RSST96a].

Quelques mots sur les algorithmes de 4-coloriage

Puisque le nombre chromatique des graphes planaires est connu comme étant inférieur ou égal à 4, il est intéressant de mettre au point des algorithmes rapides afin de tenter de k-colorier les graphes planaires tels que $k < 5$.

La bibliographie concernant la coloration de graphes est très abondante, voir par exemple dans [W]. Dans le cas particulier de la coloration des graphes planaires, on peut distinguer deux catégories d'algorithmes : ceux qui aboutissent directement à une k-coloration avec $k < 6$ et ceux qui procèdent par essais et corrections de k-colorations avec $k > 4$.

Par exemple, dans [CNS81], [MST81] les auteurs présentent des algorithmes qui permettent de colorier avec au plus cinq couleurs tout graphe planaire et cela en temps linéaire.

Dans [AS86] et [MS91], les auteurs proposent des algorithmes de coloration pour des graphes d'ordre important (plus de 128000 sommets) ainsi que des techniques de résolution d'impasses par retour-arrière localisé, par chaînes de KEMPE ou par *Wandering*.

1.2 Intérêt des graphes $MPG5$ quant au problème de la 4-coloration

Nous allons ici mettre en évidence l'existence d'une relation étroite entre le problème de la 4-coloration et celui de l'étude des graphes planaires maximaux de degré minimum cinq.

1.2.1 Quels sont les graphes planaires les plus difficiles à 4-colorier?

Les graphes planaires les plus difficiles à colorier, *i.e.* avec quatre couleurs, sont sans aucun doute les graphes planaires triangulés. Les graphes planaires triangulés sont des graphes planaires *saturés* d'arêtes. On emploie le mot *saturé*, dans le sens où l'on ne peut plus rajouter d'arête dans un tel graphe sans perdre la planarité.

1.2.2 Quels sont les graphes planaires maximaux les plus difficiles à 4-colorier?

Parmi les graphes planaires triangulés, il y en a de plus difficiles à 4-colorier que d'autres. Ce sont ceux dont tous les sommets sont de degré au moins égal à cinq. Ils sont dits $MPG5$[1].

La raison pour laquelle les graphes $MPG5$ sont les triangulations de la sphère les plus difficiles à 4-colorier tient au fait que tout sommet de degré inférieur à 5 est 4-coloriable. Prouvons-le.

1. Soit v un sommet de degré inférieur ou égal à trois. Clairement, le sommet v peut être colorié par une des quatre couleurs non utilisée parmi ses voisins.

2. Soit v un sommet de degré quatre. En utilisant les chaînes de KEMPE on peut toujours colorier v par une des quatre couleurs. On le montre, mais auparavant on présente deux observations.

   On considère une 4-coloration d'un graphe G par les couleurs notées a, b, c et d. Une chaîne de KEMPE (a, b) est une composante connexe induite par tous les sommets de couleurs a et b.

1. $MPG5$ pour *Maximal planar Graph with minimum degree five.*

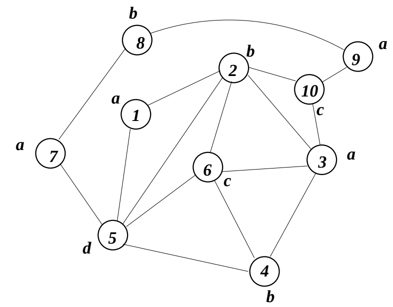

FIG. 3 - *Exemple de chaînes de* KEMPE.

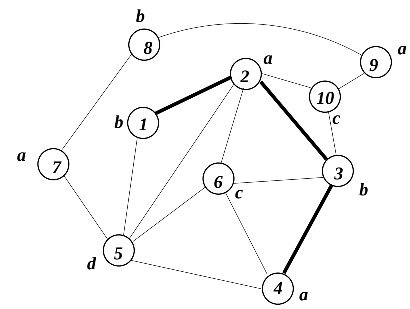

FIG. 4 - *Exemple de chaînes de* KEMPE. *(2).*

Exemple Sur la figure 3, les chaînes $(1, 2, 3, 4)$ et $(7, 8, 9)$ sont des chaînes de KEMPE (a, b), et la chaîne $(4, 6, 2)$ est une chaîne de KEMPE (b, c).

On doit alors faire les remarques suivantes.

(a) On peut interchanger les couleurs a et b sur une chaîne de KEMPE (a, b), sans créer de conflit de coloration ; c'est-à-dire que sur la chaîne, on permute les deux couleurs, la couleur a devient b et la couleur b devient a. Cela naturellement est valable pour n'importe quelle autre chaîne bicolore, (b, c), (c, a), etc.

Par exemple, figure 3, sur la chaîne $(1, 2, 3, 4)$, on peut interchanger les couleurs a et b, sans créer de conflit de coloration ; voir figure 4.

(b) Dans le cas où le sous-graphe induit par les sommets de couleurs a et b n'est pas connexe, interchanger les couleurs a et b sur l'une des composantes connexes fournira une nouvelle coloration.

Par exemple les deux 4-colorations des figures 3, 4 sont bien différentes ; puisqu'elles ne reposent pas simplement sur une permutation des couleurs. Par exemple une permutation des couleurs pourra être la suivante, on remplace la couleur a par la couleur b, b par c, c par d et d par a.

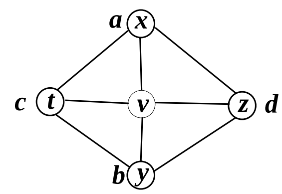

FIG. 5 - *Impasse sur un sommet de degré quatre.*

On montre alors que tout sommet v de degré quatre peut être 4-colorié.

Premièrement si les quatre voisins utilisent moins de quatre couleurs, alors le sommet v est immédiatement coloriable par une des quatre couleurs non utilisées dans son voisinage. Par exemple, supposons que les quatre voisins du sommet v utilisent seulement les trois couleurs a, b et c ; alors on peut aussitôt colorier v par la couleur d.

Supposons alors que le sommet v soit tel que ses quatre voisins utilisent déjà les quatre couleurs symbolisées par a, b, c et d ; voir figure 5.

On dit alors qu'il y a une impasse sur le sommet v, car la coloration courante implique l'utilisation d'une cinquième couleur pour le sommet v. Pour résoudre ce problème, on décrit le premier voisinage du sommet v par la liste suivante,

$$x, z, y, t,$$

et supposons que le sommet x (resp. z, y, t) soit colorié par la couleur a (resp. d, b, c) ; voir figure 5. Afin d'éliminer l'impasse, c'est-à-dire de prouver que le sommet v peut être colorié par une des quatre couleurs a, b, c ou d, on distingue deux cas.

(a) La chaîne (a, b) issue du sommet x ne contient pas le sommet y ; c'est-à-dire que la chaîne (a, b) issue du sommet x et celle issue du sommet y appartiennent à deux composantes connexes différentes dans le sous-graphe des sommets bicoloriés par a et b.

    Dans ce cas on interchange les couleurs a et b sur la chaîne (a, b) issue du sommet x. Les sommets x, y sont alors tous deux de couleur b et le sommet t (resp. z) de couleur c (resp. d). On peut donc colorier le sommet v par la couleur a : l'impasse est éliminée.

(b) La chaîne (a, b) issue du sommet x contient le sommet y. Elle coupe donc le plan en deux. Par planarité, la chaîne (c, d) issue du sommet t ne contient pas le sommet z ; voir figure 6. On est dans le cas précédent.

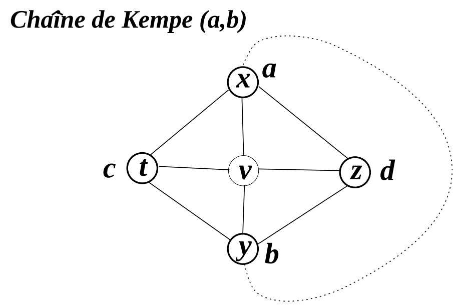

FIG. 6 - *Résolution d'impasse pour un sommet de degré quatre par les chaînes de* KEMPE.

Ainsi dans un graphe planaire, tout sommet de degré inférieur à cinq est immédiatement coloriable par une couleur parmi a, b, c et d. D'autre part pour les graphes planaires, la formule d'EULER,

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \ldots - (6-h)n_h = 12 \tag{1}$$

où n_i est le nombre de sommets de degré i, implique que dans tout graphe planaire, il existe nécessairement des sommets de degré inférieur à six. En conséquence il n'existe pas de triangulation de la sphère de degré minimum k avec $k > 5$; en d'autres termes il n'existe pas de graphes $MPGk$ avec $k > 5$. Les graphes planaires les plus difficiles à colorier avec quatre couleurs sont donc les graphes $MPG5$.

1.3 Conclusion

Dans cette thèse, d'une certaine manière, on a cherché à contribuer à mieux connaître les graphes planaires. Sans aborder directement le problème des quatre couleurs, on a cherché à se concentrer sur un problème connexe, celui de l'énumération constructive des triangulations de la sphère de degré minimum cinq. Néanmoins, nous nous sommes intéressé directement au problème de coloration. Par exemple, dans [Rol96], nous avons proposé une 4-coloration de certains graphes $MPG5$ et plus largement dans [HDR94b] et [HDR94c], nous avons présenté deux algorithmes de coloration de graphes, appelés respectivement MAYA et WILLY.

Ainsi c'est le problème de la 4-coloration des graphes planaires qui a motivé l'étude particulière des graphes $MPG5$ par rapport à celle plus générale des graphes planaires. Ce document ne cherchera pas à prouver que tous les graphes $MPG5$ sont 4-coloriables, mais seulement à fournir des outils pour les construire et les énumérer.

L'intérêt de nos travaux tient au fait que la génération des graphes $MPG5$ sans répétitions, ni tests d'isomorphismes fait partie d'un problème ouvert. Celui-ci, rappelé dans [Avi94], consiste en la génération des triangulations de la sphère (*i.e.*, pas seulement les $MPG5$) sans répétition, ni test d'isomorphisme.

La bibliographie concernant la construction de graphes MPG[2] est assez abondante. Moins importante est, celle plus spécialisée, de leur énumération efficace. Encore plus faible est la quantité de littérature concernant la construction de graphes $MPG5$. Dans le chapitre suivant, on va s'attacher à décrire cette littérature.

Précisément cette thèse présentera d'une part des outils pour construire l'ensemble des graphes $MPG5$ et d'autre part un procédé afin de les énumérer sans test d'isomorphisme ni stockage (*sans stockage* signifie que l'on ne conserve pas les graphes non isomorphes). L'élaboration de certains de ces outils a été présentée dans [HDR95].

2. MPG pour *Maximal Planar Graph.*

Chapitre 2

État de l'art

Il a été montré dans [Ore67], [EAH89], [Nin87] que tout graphe planaire triangulé, noté MPG[1] pouvait être transformé en un autre graphe MPG de même ordre et cela par la transformation diagonale [Ore67]. Il existe des travaux sur les graphes MPG infinis, par exemple ceux de R. HALIN dans [Hal89]. Cette thèse ne s'intéressera qu'aux graphes MPG finis.

Bien qu'ancienne, cette transformation diagonale est encore très utilisée. En effet il y a par exemple les travaux récents de D. AVIS [Avi94] qui fabrique sans répétition les graphes planaires *r-enracinés* et ceux de S. G. BOSWELL [Bos91] qui calcule le nombre minimum de , -opération à utiliser afin de transformer un graphe MPG en un autre MPG. La transformation , développée par AL-HAKIM [AH89] est une extension de la diagonale transformation.

Par la suite, nous utiliserons nous aussi cette transformation afin d'énumérer tous les graphes $MPG5$.

Dans [BETT94], on peut trouver une large bibliographie commentée concernant entre autres les tests de planarité et la représentation des graphes planaires (*straight-line drawings, orthogonal grid drawings, etc.*). A ce titre on peut mentionner deux résultats classiques, d'une part le premier algorithme de test de planarité en temps linéaire, dû à J. HOPCROFT et R. E. TARJAN [HT74] et d'autre part la preuve que tout graphe planaire admet une représentation sans intersections dans le plan avec uniquement des arêtes rectilignes, dû à K. WAGNER [Wag36], I. FARY [Far36] et S. K. STEIN [Ste51]. Enfin on cite deux logiciels de manipulation de graphes, d'une part **Cabri-graphes** réalisé originellement par O. BAUDON [Bau90] et d'autre part **Groups & Graphs** réalisé par W. KOCAY et C. PANTEL [KP95].

1. MPG, pour *Maximal Planar Graph.*

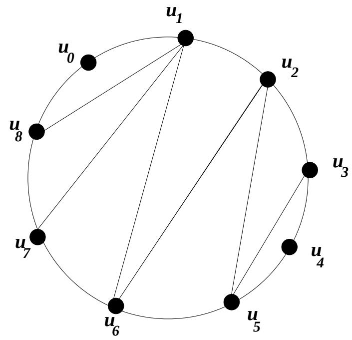

FIG. 7 - *Première étape commune à l'Expansion et Réduction.*

Remarque Les applications des graphes planaires maximaux, notés MPG, ou des graphes $MPG5$, n'ont pas été notre souci. Néanmoins, on indique que la construction de graphes MPG possède certaines applications, par exemple pour l'élaboration de circuits imprimés, [Gif84].

2.1 Générer les triangulations de la sphère avec un degré minimum cinq

Comme on l'a dit, la littérature sur la génération des graphes planaires maximaux de degré minimum cinq, notés $MPG5$, n'est pas très abondante. Les deux algorithmes les plus répandus pour cette génération sont celui de G. MARBLE, D. W. MATULA et J. D. ISAACSON [MMI72] et celui de C. A. MORGENSTERN et H. D. SHAPIRO [MS91].

Il existe sur la base de ces deux algorithmes un certain nombre de variations. On s'attachera, dans ce document, à définir uniquement les versions originales.

Le premier algorithme est designé par *expansion*, le second par *réduction*.

Ces méthodes commencent toutes deux par la construction d'un circuit Ψ_0. Ensuite, elles triangulent aléatoirement la face *intérieure* de celui-ci par l'ajout d'arêtes. A ce stade les deux algorithmes divergent dans leur statégie pour trianguler la face *extérieure* de Ψ_0. On a donné un exemple d'un cycle Ψ_0 et de cette triangulation sur la figure 7.

2.1.1 Algorithme d'expansion

Le procédé de triangulation de la face extérieure est donné par l'algorithme 8.

Un exemple d'exécution de cet algorithme apparaît sur la figure 9. Il est issu de l'exécution de l'algorithme jusqu'à la ligne (12) incluse, et prend en entrée le graphe de la figure 7. Au début de la ligne (13), le circuit Ψ est alors :

Entrée : Un circuit Ψ de longueur k, dont la face intérieure
est vide de sommets et entièrement triangulée.
Sortie : Un graphe $MPG5$.
Nom : `Triangulation de la face extérieure par Expansion`(Ψ)

(1) **Début**
(2) **Si** $|\Psi| > 3$ **Alors**
(3) Créer un nouveau sommet v à l'extérieur de Ψ
(4) Choisir aléatoirement un sommet u_0 appartenant au circuit Ψ
(5) `Ajouter l'arête`(v, u_0)
(6) On renomme Ψ dans le sens direct par $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{|\Psi|}$
(7) $i \leftarrow 1$
(8) **Répéter**
(9) `Ajouter l'arête`(v, u_i)
(10) $i \leftarrow i + 1$
(11) **Jusqu'à** $dg(u_i) < 5$ **ou** $i = |\Psi|$
(12) $\Psi \leftarrow \Psi + \{v\} - \{u_1, \ldots u_{i-1}\}$
(13) `Triangulation de la face extérieure par Expansion` (Ψ)
(14) **Fin**

ALG. 8 - *Construction d'un graphe $MPG5$ par Expansion.*

$$u_0, v, u_3, u_4, \ldots, u_8.$$

Terminaison

L'algorithme d'Expansion s'arrête lorsque le circuit Ψ est un triangle. Les sommets du graphe courant ont alors un degré supérieur à quatre.

La terminaison de cet algorithme n'est pas garantie si l'on ne met aucune restriction sur le choix du sommet u_o. En effet, par exemple, il est possible qu'après l'étape commune aux deux algorithmes (triangulation de la face interne du circuit Ψ_0) il existe deux sommets adjacents x et y (sur le circuit Ψ_0), dont l'un possède un degré deux et l'autre un degré trois. Appelons ces sommets respectivement x et y, et plaçons-nous dans le cas où la ligne (4) opère les affectations $u_0 = x$ et $u_1 = y$; alors le circuit Ψ au début de la ligne (13) contiendra à nouveau une paire de sommets adjacents dont l'un sera de degré deux, et l'autre de degré trois (puisque dès lors $dg(x) = 3$ et $dg(v) = 2$). Si, à l'itération suivante, à la ligne (4), on fait $u_0 = x$ et $u_1 = v$ alors, le circuit suivant Ψ au début de la ligne (13) contiendra à nouveau un couple de sommets adjacents tel que l'un sera de degré deux et l'autre de degré trois ; en effet soit v' le nouveau sommet ajouté, alors

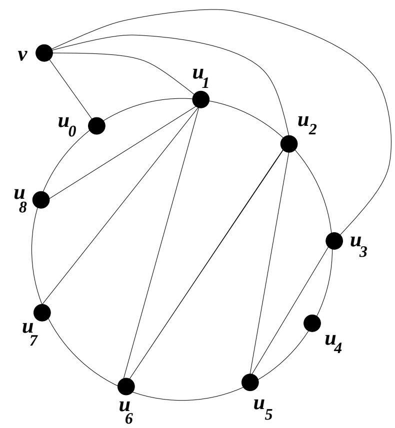

FIG. 9 - *Une itération de l'algorithme d'Expansion.*

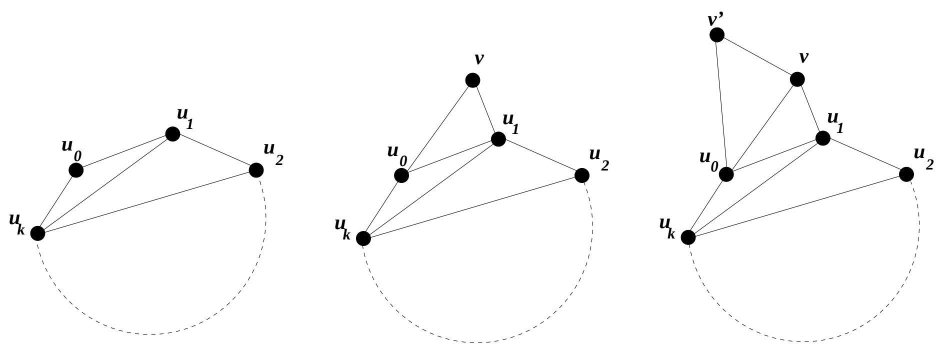

FIG. 10 - *Non terminaison de l'Expansion.*

$$dg(v') = 2,\, dg(v) = 3,$$

voir figure 10.

En conclusion, sans restriction sur la sélection du sommet u_0 de la ligne (4), dans le pire des cas, le cardinal du circuit Ψ dans l'algorithme d'Expansion tend vers l'infini, voir figure 11. En conséquence cet algorithme dans le pire des cas, peut ne jamais terminer.

Remarque On ne sait pas si l'algorithme d'Expansion peut atteindre tous les graphes $MPG5$. En revanche, C. MORGENSTERN et H. D. SHAPIRO [MS91] et nous-même [HDR94a] avons constaté que les graphes construits à l'aide de cette méthode possédaient une distribution des degrés telle qu'il existait des sommets de grands degrés ; ce qui, dans la perspective d'une expérimentation d'algorithmes de coloration, est un avantage puisque cela permet de créer des graphes plus difficiles à 4-colorier.

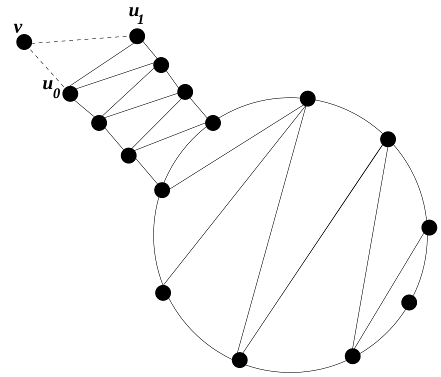

FIG. 11 - *Exemple de non terminaison de l'Expansion.*

2.1.2 Algorithme de réduction

Cette méthode est en quatre étapes. La première consiste à développer un circuit Ψ_0 de longueur k ; la seconde réalise une triangulation de la face interne par un procédé tel que celui décrit pour la méthode d'expansion ; la troisième triangule la face externe du circuit Ψ_0 par un procédé, identique à celui employé pour la face interne en prenant garde de ne pas créer d'arêtes multiples.

A la suite de cette troisième étape, le graphe courant est un graphe planaire entièrement triangulé et de degré minimum trois. Le graphe de la figure 7 à la suite de l'étape trois de l'algorithme de réduction pourrait être celui de la figure 13.

La dernière étape de cet algorithme est décrite succinctement dans [MS91] ; pour plus de détails on peut se procurer le programme dans [Mor]. La méthode utilisée pour transformer un graphe triangulé planaire, c'est-à-dire un graphe MPG en un graphe $MPG5$ est la suivante : d'abord on retire tous les sommets de degré trois et on fusionne tous les sommets de degré quatre avec un de leurs quatre voisins, puis on revient à la première étape tant que le graphe n'est pas $MPG5$; voir l'algorithme 12.

On rappelle que dans un graphe planaire maximal, contenant un sommet x vérifiant la ligne $(C2)$, il existe forcément un couple de sommets non-adjacents dans son premier voisinage ; d'où la ligne $(C3)$.

Le graphe issu de cette dernière étape est évidemment soit vide soit $MPG5$.

Notons que dans [MS91], les auteurs ont prouvé que l'algorithme de réduction pouvait théoriquement construire tous les graphes $MPG5$.

Entrée : Un graphe d'ordre k, contenant un circuit Ψ de longueur k
    dont les deux faces interne et externe sont entièrement triangulées.
Sortie : Un graphe $MPG5$.
Nom : `Réduction` (G)

Début
Tant que Vrai Faire
    Si il existe un sommet x de degré trois **Alors**
        `retirer un sommet de degré trois`(G,x)
    Sinon
        Si il existe un sommet x de degré quatre **Alors**
            `retirer un sommet de degré quatre`(G,x)
        Sinon
            / Le graphe est soit vide, soit $MPG5$ */*
            Retourner(G)
Fin

Entrée : Un graphe G, et un sommet x de degré trois
Sortie : Le graphe G après destruction du sommet x.
Nom : `retirer un sommet de degré trois`(G,x)

Début
Retirer le sommet x
Mise à jour des degrés
Retourner (G)
Fin

Entrée : Un graphe G, et un sommet x de degré quatre
Sortie : Le graphe G après destruction du sommet x.
Nom : `retirer un sommet de degré quatre`(G,x)

Début
Le premier voisinage du sommet x est z, t, r, s
    dans le sens indirect tel que les z et r soient non-adjacents
Si les sommets t et s sont non adjacents **Alors**
    Si $(dg(z) + dg(r)) < (dg(t) + dg(s))$ [a] **Alors**
        $\alpha \leftarrow z$; $\beta \leftarrow r$
    Sinon
        $\alpha \leftarrow t$; $\beta \leftarrow s$
Sinon
    $\alpha \leftarrow z$; $\beta \leftarrow r$
Retirer le sommet x, puis connecter les deux sommets α, β
Mise à jour des degrés
Retourner (G)
Fin

[a] On note $dg(x)$ le nombre de voisins du sommet x ; *i.e.* le degré de x.

ALG. 12 - *Réduction d'un graphe MPG dans un graphe $MPG5$.*

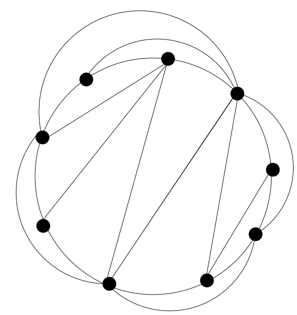

FIG. 13 - *Exemple de deuxième étape de la Réduction.*

Degré	5	6	7	8	9	10	11	12	13	≥ 14
Réduction	34. 8	37. 8	20. 8	5. 9	0. 6	0. 0	0. 0	0. 0	0. 0	0. 0
Expansion	50. 1	26. 6	12. 4	5. 1	2. 3	1. 3	0. 7	0. 5	0. 3	0. 6

TAB. 14 - *Distribution des degrés en pourcentage entre l'algorithme d'Expansion et l'algorithme de Réduction.*

2.1.3 Expérimentation

Si un générateur de graphes $MPG5$ est dédié à l'expérimentation d'algorithmes de coloration des sommets, alors un critère de qualité, pour un tel générateur, pourrait être celui de pouvoir fabriquer des graphes avec des degrés Δ importants. En effet, on constate que plus Δ est important, plus le graphe, dans le cas général, sera difficile à 4-colorier.

Pour permettre la comparaison de ces deux algorithmes Réduction et Expansion, on donne une table de distribution des degrés pour la fabrication de 25 graphes $MPG5$ de 16 000 sommets (environ) par les deux méthodes. Cette table est extraite de l'article [MS91]. Le degré maximal calculé par l'algorithme de Réduction (resp. Expansion) est de 10 (resp. 37), voir table 13. Dans [HDR94a], toujours pour des graphes d'ordre 16000, nous proposons des résultats expérimentaux en comparant les deux algorithmes précédents, ainsi que deux autres algorithmes.

On peut trouver dans [Mor] un ensemble de programmes en langage *C* et *Pascal* permettant la fabrication de graphes particuliers, comme les graphes aléatoires, les graphes de LEIGHTON [Lei79], les graphes k-partites, les graphes géométriques ainsi que les graphes $MPG5$. On trouve aussi des algorithmes de coloration de graphes utilisant des techniques de résolution d'impasse telles que les chaînes de KEMPE, le *Wandering*, ou le retour-arrière localisé.

2.1.4 Enumération des graphes planaires maximaux

Le problème de la génération efficace des triangulations de la sphère non enracinée (*i.e.* non pointée) a été largement étudié dans la littérature. Ceci apparaît plus difficile que la génération de toutes les triangulations enracinées, et la plupart des algorithmes font appel à des tests d'isomorphisme. Cela signifie que toutes les triangulations non isomorphes doivent être stockées. On rappelle quelques résultats.

R. Bowen, et S. Fisk [BF67] ont décrit une méthode pour générer toutes les triangulations de la sphère. M. B. Dillencourt [Dil92] donne un algorithme pour générer tous les polyèdres simples en 3 dimensions. A. Deza, K. Fukuda et V. Rosta [DFR93] donnent une méthode pour fabriquer tous les 3-polytopes simples en appliquant une variation du théorème de K. Wagner [Wag36] et en utilisant la procédure *reverse search* développée par D. Avis et K. Fukuda [AF93]. H. Stamm-Wilbrand [SW93] décrit un algorithme simple pour générer toutes les triangulations de la sphère en partant de K_4.

On présente deux méthodes récentes d'énumération.

- D. Avis et K. Fukuda [AF93] ont décrit une procédure appelée *Reverse Search* qui peut être vue comme une *technique pour générer tous les sommets d'un graphe dont les arêtes sont données implicitement par ce que l'on est convenu d'appeler un "oracle"*.

  Une application de cette méthode a été développée par le premier auteur :

  D. Avis [Avi94] donne un algorithme utilisant la procédure *reverse search* pour générer tous les graphes de n sommets qui sont 2 et 3 connexes planaires triangulés avec r sommets sur la face extérieure. Les triangulations sont *enracinées* ou *pointées*, ce qui signifie que la numérotation des sommets sur la face extérieure est fixée. Cette application génère sans répétition tous les graphes 2 et 3-connexes *r-enracinés* triangulés. Mais comme le fait remarquer l'auteur, chaque triangulation de la sphère d'ordre n peut apparaître au plus $12n-24$ fois comme une triangulation *enracinée*. Ainsi, si l'on veut générer toutes les triangulations de la sphère d'ordre n, chacune de ces duplications doit être éliminée par un test d'isomorphisme.

  Il existe des résultats concernant l'énumération des graphes $MPG4$ enracinés par la procédure *reverse search*, par exemple ceux très récents de C. M. Kong dans [Kon96].

- B. D. MacKay [McK93] décrit un procédé de génération exhaustive sans test d'isomorphisme par calcul d'orbites ainsi que par calcul de formes canoniques. Ce procédé est voisin de la procédure *"orderly generation"* développée par R. C. Read dans

[Rea78]. Dans [BMS95], ce procédé a été utilisé pour la première fois, afin d'énumérer les graphes cubiques [2] de calibre [3] 9. D'autres applications de ce procédé ont été depuis développées, [Bri96], [FMB95], [BD96a], [BD96b]. On peut trouver certains programmes utilisant ce procédé par **ftp** dans [McK87], [McK90] et [Bri96].

Le second procédé est celui que nous avons choisi pour énumérer tous les graphes $MPG5$.

On doit rappeler les travaux de W. Tutte sur l'énumération existentielle (*i.e.* non constructive) des triangulations de la sphère. Dans [Tut56], l'auteur donne une formule exacte énumérant les graphes planaires 3-*enracinés* d'ordre n. Soit $g(n,3)$ le nombre des graphes planaires *3-enracinés*,

$$g(n,3) = \frac{2}{(n-2)!}(3n-6)(3n-5)\dots(4n-11).$$

Plus généralement, le problème de l'énumération des cartes planaires pointées a été très étudié. Le nombre de telles cartes comportant m arêtes est égal à

$$a_m = \frac{2.(2m)!}{m!(m+2)!}3^m.$$

Il existe au moins cinq preuves de cette formule dues à Tutte dans [Tut56], [Tut68], à Lehman dans [Leh70], à Cori et Richard dans [CR72] et enfin à Cori et Vauquelin dans [CV81].

2.2 Plan de la thèse

Les algorithmes actuels de construction de graphes $MPG5$ souffrent d'un défaut important : il n'est pas possible de fabriquer des graphes $MPG5$ pour un ordre n donné. Ce défaut fait qu'il est difficile de les adapter pour une éventuelle énumération.

Précisément, d'une part il n'existe pas de générateurs de graphes $MPG5$ pour un ordre n fixé et, d'autre part, il n'existe pas non plus d'algorithme d'énumération de tous ces graphes sans répétitions ni stockage.

L'objet de cette thèse est la fabrication et l'énumération des graphes $MPG5$ sans test d'isomorphisme pour un ordre n fixé.

Le point central de ce document est le choix du processus de fabrication. L'idée de base

2. Un graphe cubique est un graphe trois régulier ; *i.e.* tous les sommets ont exactement trois voisins.
3. Le calibre (en anglais *girth*) correspond à la longueur du plus long cycle dans [Ber87].

pour fabriquer tous les graphes $MPG5$ d'ordre n est de procéder de manière itérative; c'est-à-dire, en partant du graphe $MPG5$ d'ordre 14 et à l'aide d'outils adaptés, de générer tous les graphes $MPG5$ d'ordre 15, à partir des graphes $MPG5$ d'ordre 15, de générer tous ceux d'ordre 16, etc. jusqu'à l'ordre n.

La démonstration de ce procédé, c'est-à-dire, la preuve que l'ensemble des outils proposés peuvent fabriquer tous les graphes $MPG5$, utilisera la réciproque. En d'autres termes, on montrera que par ces outils il est toujours possible de réduire un graphe $MPG5$ d'ordre $n \geq 14$ à un graphe $MPG5$ d'ordre 14.

Les graphes $MPG5$ d'ordre $n < 14$ sont peu nombreux: il existe un unique graphe $MPG5$ d'ordre inférieur à 14, il est d'ordre 12 et ne contient que des sommets de degrés 5.

1. Dans la première partie de la thèse, on rappelle les notions de base de la théorie des graphes, et des cartes topologiques. On propose ensuite un ensemble de définitions spécifiques décrivant d'une part une partition des graphes $MPG5$[4] et d'autre part un ensemble de transformations[5].

2. Dans la seconde partie, et dans un premier temps, on définit l'ensemble des graphes $MPG5$ réductibles par les transformations définies en première partie[6]. On propose alors un certain nombre de nouveaux outils permettant de réduire les graphes $MPG5$ restants; *i.e.* non réduits jusque-là. Finalement on démontre que tous les $MPG5$ d'ordre $n \geq 14$ sont réductibles à l'unique graphe $MPG5$ d'ordre 14 ; ce qui signifiera qu'à l'aide des outils inverses[7], il sera possible de construire tous les graphes $MPG5$ d'ordre $n \geq 14$. Finalement, on extrait un algorithme qui génère tous les graphes $MPG5$ d'ordre $n \geq 14$ fixé.

3. La dernière partie propose un algorithme qui génère tous les graphes $MPG5$. Cette partie reprend l'algorithme développé dans la seconde partie et insère un mécanisme de contrôle d'énumération emprunté à [McK93]. Ainsi cette partie proposera l'adaptation de la méthode d'énumeration [BMS95] de manière à donner un algorithme générant toutes les triangulations de la sphère de degré minimum cinq sans répétition ni test d'isomorphisme.

4. Les graphes notés A, B et C.
5. Les transformations notées T et T' ainsi que les transformations inverses T^{-1} et $(T')^{-1}$.
6. Les transformations T^{-1} et $(T')^{-1}$.
7. Par exemple T et T'.

Première partie

Notions de Base : rappels et définitions

Chapitre 1

Rappel de quelques notions de la théorie des graphes

Les références des ouvrages utilisés pour l'ensemble des rappels de ce chapitre sont [AG93], [Ber87], [Bol78], [TS92].

1.1 Graphe orienté

On appelle *graphe orienté*, un couple $G = (X, E)$ où,

- X est un ensemble, dont les éléments sont appelés *sommets* ou *noeuds* du graphe,
- E est un ensemble de couples de $X \times X$, dont les éléments $u = (x, y)$ sont appelés *arcs* du graphe G, x et y étant des sommets de X.

Exemple : Représentation graphique.

Le graphe orienté de la figure 15 est décrit par les deux ensembles suivants,

- $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (5, 4)\}$

Remarques

- Si X contient n sommets, le graphe G est d'*ordre* n.
- L'arc (x, y) est dit *orienté* de x (*extrémité initiale*) vers y (*extrémité finale*).

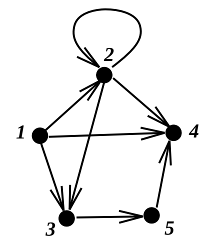

FIG. 15 - *Exemple d'un graphe orienté.*

- Par cette définition, il y a, pour tout couple de sommets x et y, au plus un arc de x vers y. Un arc (x, x), allant de x vers x, s'appelle une *boucle*.

Dans l'étude de certaines propriétés des graphes, il arrive que l'orientation des arcs, c'est-à-dire la distinction entre extrémité initiale et extrémité finale ne joue aucun rôle. On peut justement citer par exemple le problème de coloration de graphes.

1.2 Graphe non orienté

On définit un *graphe non orienté*, comme un couple $G^\star = (X, E^\star)$ avec,

- X est l'ensemble des *sommets* du graphe $G^\star$,
- $E^\star$ est un ensemble de paires de $X \times X$, dont les éléments $u = (x, y)$ sont appelés *arêtes* du graphe $G^\star$, x et y étant des sommets de X.

A un graphe orienté $G = (X, E)$ on associe alors le graphe non orienté $G^\star = (X, E^\star)$ obtenu en supprimant l'orientation des arcs de E, c'est-à-dire

$$E^\star = \{ \text{ arêtes } (x, y) / \text{l'arc } (x, y) \text{ soit dans } E \}.$$

Le graphe non orienté $G^\star$ est dit *sous-jacent* au graphe orienté G.

Exemple Le graphe non orienté associé au graphe orienté de la figure 15 est présenté en figure 16.

Remarques

- Si l'on impose qu'il n'y ait pas de boucle, le graphe est dit *simple*.
- Un graphe non orienté peut être considéré comme un graphe orienté (X, E) particulier, dans lequel pour tout arc (x, y) de E, l'arc opposé (y, x) est également dans E.

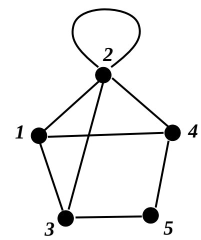

FIG. 16 - *Exemple d'un graphe non orienté.*

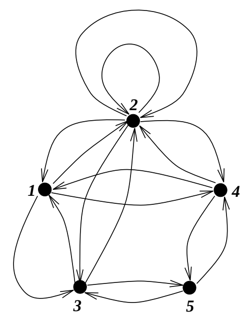

FIG. 17 - *Correspondance graphe orienté et non orienté.*

Exemple Le graphe non orienté $G^{\star}$ de l'exemple de la figure 16, considéré comme un graphe orienté, se représente par le graphe de la figure 17.

1.3 Sous-graphe et graphe partiel

Un *sous-graphe* engendré par un sous-ensemble de sommets X' d'un graphe $G = (X, E)$ est le graphe dont les sommets sont les éléments de X' et dont les arcs (resp. arêtes) sont ceux de G ayant leurs deux extrémités dans X'.

Un *graphe partiel* d'un graphe (X, E) est par définition un graphe de la forme (X, E') où $E' \subset E$.

Exemple Considérons le graphe (X, E) représentant la carte routière de la France : X est l'ensemble des villes de France, et $e = (x, y) \in E$ si e est une route qui va de la ville x à la ville y. La carte des routes à grande circulation est un graphe partiel, tandis que la carte routière de Charente-Maritime est un sous-graphe.

Remarque Jusqu'à la fin de ce document on ne considérera que les graphes simples, non-orientés, avec au plus une arête entre deux sommets (*i.e.* sans *arêtes multiples*).

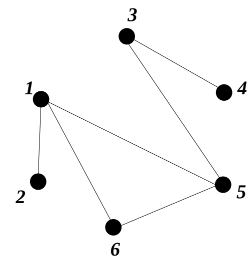

FIG. 18 - *Graphe connexe.*

1.4 A propos des sommets et des arêtes

1.4.1 Chemin et connexité

Un *chemin* d'un graphe $G = (X, E)$ est une séquence alternative et finie de sommets et d'arêtes du type

$$v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

telle que

- v_{i-1} et v_i sont les extrémités de l'arête e_i, avec $i \in [1, k]$.
- tous les sommets sont distincts.

En général, dans l'écriture d'un chemin on omet les arêtes e_i, c'est-à-dire que l'on écrira le chemin précédent par,

$$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k$$

Exemple Sur le graphe de la figure 18.

- $(2, 1, 6, 5)$ et $(1, 6, 5, 3, 4)$ sont des chemins.
- $(5, 1, 6, 5, 3)$ et $(2, 6, 5, 3)$ ne sont pas des chemins.

Un graphe $G = (X, E)$ est *connexe* s'il existe au moins un chemin entre chaque couple de sommets de X. Le graphe de la figure 18 est connexe. En revanche si on retire le sommet 5 de la même figure, dans ce cas, on obtient deux composantes connexes (cf. figure 19).

1.4.2 Distance entre sommets

La *distance* entre deux sommets x et y dans un graphe G, notée $d(x, y)$ est la longueur du plus court chemin de x à y dans G.

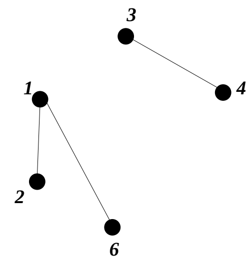

FIG. 19 - *Graphe non connexe.*

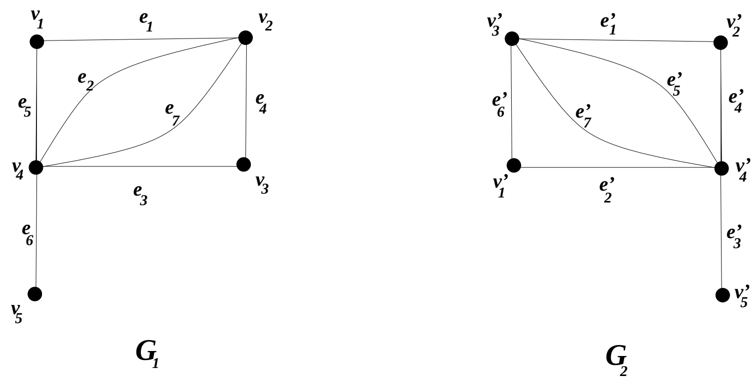

FIG. 20 - *Deux graphes isomorphes.*

Exemple Sur la figure 18.

- $d(1,1) = 0$, $d(1,2) = 1$, $d(1,5) = 1$, $d(1,3) = 2$, $d(1,4) = 3$
- $d(2,2) = 0$, $d(2,1) = 1$, $d(2,6) = 2$, $d(2,4) = 4$

La distance entre deux sommets appartenant à deux composantes connexes différentes est par convention infinie.

Exemple Sur le graphe de la figure 19, $d(1,3) = \infty$.

1.4.3 Isomorphisme

Deux graphes $G_1 = (X_1, E_1)$ et $G_2 = (X_2, E_2)$ sont *isomorphes* si et seulement si il existe une bijection de X_1 dans X_2, qui induit une bijection de E_1 dans E_2.

En d'autres termes, si les sommets v_1 et v_2 du graphe G_1 correspondent à v'_1 et v'_2 dans le graphe G_2 alors l'arête (v_1, v_2) de G_1 correspond à l'arête (v'_1, v'_2) dans G_2 et vice-versa.

Ainsi les deux graphes de la figure 20 sont isomorphes. Les correspondances entre leurs ensembles de sommets et leurs ensembles d'arêtes sont les suivantes :

- Correspondance des ensembles de sommets :

$v_1 \longleftrightarrow v'_2$, $v_2 \longleftrightarrow v'_3$, $v_3 \longleftrightarrow v'_1$, $v_4 \longleftrightarrow v'_4$, $v_5 \longleftrightarrow v'_5$.

- Correspondance des ensembles d'arêtes :

  $e_1 \longleftrightarrow e'_1$, $e_2 \longleftrightarrow e'_5$, $e_3 \longleftrightarrow e'_2$, $e_4 \longleftrightarrow e'_6$, $e_5 \longleftrightarrow e'_4$, $e_6 \longleftrightarrow e'_3$, $e_7 \longleftrightarrow e'_7$.

1.4.4 *ième*-voisinage d'un sommet

Soit $G = (X, E)$ un graphe et x un sommet de G.

$N^i(x)$ représente le *ième-voisinage* de x ; c'est-à-dire l'ensemble des sommets à une distance i du sommet x ; N pour *Neighborhood.*

On note $N(x) = N^1(x)$.

Exemple Sur le graphe de la figure 18,

- $N(1) = (2, 6, 5)$, $N(2) = (1)$, $N(3) = (4, 5)$
- $N^2(1) = (3)$, $N^2(2) = (5, 6)$, $N^2(3) = (1, 6)$
- $N^3(1) = (4)$, $N^3(2) = (3)$, $N^3(3) = (2)$

On peut exprimer le second voisinage de x par l'égalité suivante :

$$N^2(x) = \left(\bigcup_{y \in N(x)} N(y) \right) - N(x) - x$$

1.4.5 Degré d'un sommet et $\Delta(G)$, $\delta(G)$

Le *degré d'un sommet* ou *valence d'un sommet* est le nombre d'arêtes qui en sont issues.

Le degré d'un sommet x dénoté par $dg(x)$ est, ici, défini par $|N(x)|$. On note Δ et δ les entiers suivants :

$$\Delta(G) = \max_{x \in X}\{dg(x)\},$$
$$\delta(G) = \min_{x \in X}\{dg(x)\}.$$

Exemple Sur la figure 18.

- $dg(2) = 1$
- $dg(1) = 3$

– $dg(6) = 2$

On considère un graphe G et un sous-graphe G'. On note $dg_{G'}(x)$ (resp. $N^i_{G'}(x)$) le degré (resp. *ième-voisinage*) du sommet x dans le sous-graphe G'.

Exemple On considère les deux composantes connexes de la figure 19. Chacune de ces deux composantes peut être considérée comme un sous-graphe du graphe de la figure 18 de la page 42. Soit $G_1 = (X_1, E_1)$ la composante telle que $X_1 = \{1, 2, 6\}$ et $E_1 = \{(1, 2), (1, 6)\}$. On a $dg_{G_1}(1) = 2$, $dg_G(1) = 3$, et $N_{G_1}(1) = (2, 6)$, $N_G(1) = (2, 6, 5)$.

Remarque Quand on écrira $dg(x)$ cela signifiera $dg_G(x)$, *i.e.* le degré du sommet x dans le graphe courant G, dans la mesure où cela ne prêtera pas à confusion ; idem pour la notation $N^i(x)$ et $N^i_G(x)$.

Chapitre 2

Rappel de quelques notions sur les cartes topologiques

Dorénavant, on considèrera uniquement les graphes *finis*, simples, connexes, et sans arêtes multiples.

2.1 Carte topologique

On appelle *carte topologique* $\mathcal{T}$ sur une surface orientable $\sum_g$ de *genre* g de $\mathbb{R}^3$, une partition de $\sum_g$ en trois ensembles finis de *cellules*:

- l'ensemble des *sommets*, qui est un ensemble fini de points,
- l'ensemble des *arêtes*, qui est un ensemble fini d'arcs de Jordan ouverts simples, deux à deux disjoints, dont les extrémités (confondues ou non) sont des sommets,
- l'ensemble des *faces*. Les faces sont des domaines simplement connexes, dont les frontières sont des réunions de sommets et d'arêtes.

2.2 Genre d'une carte topologique

Le *genre de la carte* $\mathcal{T}$ est le genre g de la surface orientable $\sum_g$.

Une carte de genre 0 est dite *planaire*.

Une carte de genre 1 est dite *dessinée sur le tore*.

Si n, m, f sont respectivement les nombres de sommets, d'arêtes et de faces, on a la formule d'Euler qui donne le genre g de la carte $\mathcal{T}$:

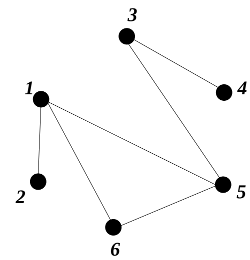

FIG. 21 - *Exemple de carte planaire.*

$$g = 1 + \frac{(m - n - f)}{2} \tag{2}$$

Pour les cartes de genre 0 :

$$n = m - f + 2 \tag{3}$$

Remarque Deux cellules sont dites *adjacentes* ou *voisines*, si l'une est dans la frontière de l'autre.

2.3 Degré d'une face

Le *degré d'une face* est le nombre d'arêtes qui lui sont voisines.

Un *isthme*, arête incidente à une seule face, est compté pour deux dans le degré de la face qui lui est voisine.

Exemple Sur la figure 21 à la page 42, les arêtes $(3, 4)$, $(3, 5)$, et $(1, 2)$ sont des isthmes.

2.4 Brin

On appelle *brin*, une arête orientée de la carte. On associe à tout brin, de façon évidente, son sommet initial, son sommet final, l'arête qui constitue son support et son brin opposé.

2.5 Carte pointée, carte enracinée

Une carte est dite *pointée* ou *enracinée* si l'un des brins b^* est distingué. Le brin b^* est appelé *brin pointé* de la carte, et son sommet initial s^* est appelé *sommet pointé* de la carte.

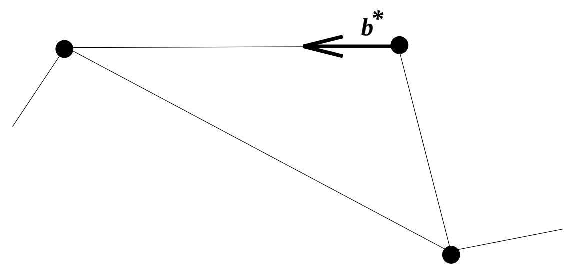

FIG. 22 - *Exemple de carte planaire pointée.*

2.6 Face extérieure

On appelle *face extérieure* de la carte, la face qui est incidente au brin pointé b^* et située à droite de b^* dans le sens de son parcours.

Exemple On représente sur la figure 22 une carte planaire pointée (de genre 0) de façon que la face extérieure de la carte soit la face non bornée dans le plan.

2.7 Cartes pointées isomorphes

Deux cartes pointées de même genre sont dites isomorphes, s'il existe un homéomorphisme de la surface associée, préservant son orientation, et envoyant les sommets, arêtes, faces et brins pointés de la première carte sur ceux de la seconde.

2.8 Graphes maximaux, graphes triangulés

On considère uniquement les graphes planaires simples et sans faces bordées par deux arêtes. Soit une représentation d'un tel graphe G. S'il est impossible d'ajouter une nouvelle arête sur la représentation de G sans perdre la planarité, on dit que G est *maximal.*

Un graphe planaire est dit *triangulé* quand toutes ses faces ont exactement trois coins.

Propriété caractéristique 2 *[Ore67] Un graphe planaire est maximal si et seulement si il est triangulé.*

Exemple On peut voir un graphe maximal, et donc triangulé, sur la figure 23.

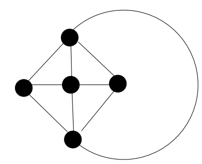

FIG. 23 - *Graphe maximal.*

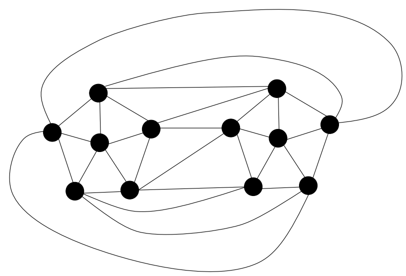

FIG. 24 - *Le plus petit $MPG5$.*

2.9 Graphes $MPG5$

On rappelle que la formule d'EULER appliquée au graphe planaire maximal peut s'écrire comme suit,

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \ldots - (6-h)n_h = 12 \tag{4}$$

avec n_i le nombre de sommets dans G avec un degré i et $h = \Delta(G)$.

Un graphe G est dit $MPG5$ pour *Maximal Planar Graph with Minimum degree five*. Un graphe $MPG5$ vérifie la formule (4) avec $n_3 = n_4 = 0$.

Exemple On peut voir le plus petit $MPG5$ sur la figure 24.

Pour la famille des graphes $MPG5$, on rappelle une égalité intéressante. Dans un graphe planaire maximal, chaque face est entourée de trois arêtes. On a alors l'égalité,

$$2m = 3f$$

Où m est le nombre d'arêtes du graphe G et f le nombre de faces. En utilisant la formule 3, dans un graphe $G = (X, E)$ planaire triangulé non vide, *i.e.* $X \neq \emptyset$, on a ainsi l'égalité suivante,

$$n = \frac{m}{3} + 2 \tag{5}$$

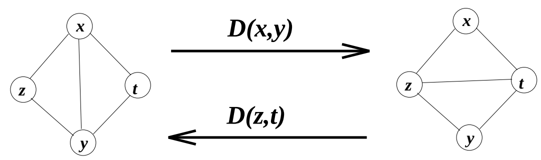

FIG. 25 - *Transformation Diagonale D.*

On introduit deux notations afin de désigner l'ensemble des graphes $MPG5$ et ceux d'ordre n : par abus de langage on désignera par $MPG5$ l'ensemble de tous les graphes $MPG5$; d'autre part, on notera $MPG5_n$ l'ensemble des graphes $MPG5$ d'ordre n.

2.10 Transformation diagonale

On rappelle une transformation classique, très utilisée pour la construction de graphes triangulés.

Soit $G = (X, E)$ un graphe $MPG5$ et $e = (x, y)$ une arête de E. Puisque G est entièrement triangulé, e borde deux triangles notés x, y, z et x, t, y. Si $e' = (z, t)$ n'est pas une arête dans E, on dit que e est *transformable* et on définit la notation :

$$D(e) = E - e + e'.$$

La transformation qui associe à E l'ensemble $E' = D(e)$ est bien connue, elle est appelée *transformation diagonale*. Quand une arête e est transformable, on dit que l'on peut *basculer* (*flip*) l'arête e.

Chapitre 3

Définitions spécifiques

Jusqu'à la fin de ce document, on s'intéresse exclusivement aux graphes $MPG5$ connexes.

Ce chapitre, rappelons-le, entend proposer un ensemble d'outils permettant de réduire l'ordre de tout graphe $MPG5$ d'ordre n à un autre graphe $MPG5$ d'ordre $n-1$. Ces outils s'appliqueront à des sommets de certains degrés. On introduit à cet effet deux définitions.

3.1 Partition de X en X_{inf6} et X_{sup6}

Soit $G = (X, E)$ un graphe. On partitionne l'ensemble X en deux sous-ensembles disjoints notés X_{inf6} et X_{sup6} tel que $X = X_{sup6} \cup X_{inf6}$. On définit ces deux ensembles :

$$X_{sup6} = \{x \in X / dg(x) \geq 6\},$$
$$X_{inf6} = \{x \in X / dg(x) < 6\}.$$

Remarque On peut vérifier *à la main* qu'il existe un unique graphe $MPG5$ tel que $|X_{sup6}| = 0$. Ce graphe contient 12 sommets de degré 5, cf. la figure 24 de la page 44. Ce graphe est l'unique graphe $MPG5$ d'ordre inférieur à quatorze.

3.2 Transformations T et T^{-1}

Avant de définir la première transformation de contraction notée T^{-1}, on décrit l'objet sur lequel elle s'applique, un carré [...].

3.2.1 Carrés ... ; ... et [... ; ...]

Soit $G = (X, E)$ un graphe $MPG5$ et e une arête de E. Puisque G est un graphe $MPG5$, e borde deux triangles notés z, t, x et z, t, y où les deux sommets x et y sont les deux voisins communs de z et t. On appelle un tel quadruplet, un *carré* $z, t\ ; x, y$.

D'autre part $z, t\ ; x, y$ est un carré $[z, t\ ; x, y]$ si et seulement si $x, y \in X_{sup6}$.

Exemple Le carré $z, t\ ; x, y$, sur la figure 26 (celle de droite), est aussi un carré $[z, t\ ; x, y]$.

3.2.2 Transformation de contraction T^{-1}

Soit G un graphe $MPG5$ tel qu'il existe un carré $s = [z, t\ ; x, y]$. On notera $T_s^{-1}(G)$ (et plus souvent, sous forme allégée $T^{-1}(s)$) le graphe G après *contraction* des deux sommets z et t en un unique sommet v ; cf. la figure 26.

On peut vérifier que pour tout carré $s = [\ldots]$, le graphe $T^{-1}(s)$ est un graphe $MPG5$.

Remarque Par la transformation T^{-1} tout graphe $MPG5$ d'ordre n contenant au moins un carré $[\ldots]$ est réductible à un graphe $MPG5$ d'ordre $n-1$. Les deux prochaines sous-sections présentent la transformation inverse de T^{-1}, notée T ainsi que l'objet sur lequel elle s'applique noté chemin $[\ldots]$. (Nous avons préféré noter T^{-1} la transformation de contraction, parce que le $^{-1}$ nous semble bien convenir à la notion de contraction.) La transformation T permettra, à partir d'un graphe $MPG5$ d'ordre n, de fabriquer un graphe $MPG5$ d'ordre $n+1$ contenant au moins un carré $[\ldots]$.

3.2.3 Chemins $[\ldots]$

Soit G un graphe $MPG5$ et x, v, y un chemin simple de longueur deux. On note ce chemin $[v\ ; x, y]$ si et seulement si,

- Le sommet v appartient à l'ensemble X_{sup6}.
- L'ensemble $N(v)$ peut être décrit dans le sens indirect par la liste suivante,

$$(x, v_1, \ldots, v_k, y, v_{k+2}, \ldots, v_q)$$

  avec $k > 1$ et $q > k+2$. Voir figure 26.

Exemple Sur la figure 26 (à gauche), il y a les chemins suivants : $[v\ ; x, y]$, $[v\ ; v_q, v_k]$, $[v\ ; v_1, v_{k+2}]$, ...

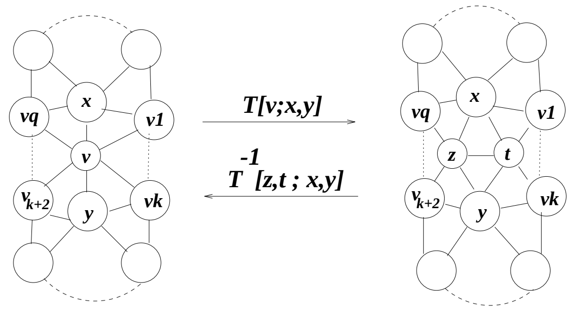

FIG. 26 - *Transformations T et T^{-1}.*

3.2.4 Transformation d'explosion T

La transformation T s'applique sur un chemin [...]. Soit $p = [v\ ; x, y]$ un chemin, le graphe $T(p)$ est le graphe G après *explosion* du sommet v en deux nouveaux sommets adjacents notés z et t, et tels que, dans le sens indirect, les premiers voisinages de z et t correspondent respectivement aux listes suivantes,

$$N(z) = (x, t, y, v_{k+2}, \ldots, v_q) \text{ et } N(t) = (x, v_1, \ldots, v_k, y, z)\,.$$

On pourra vérifier que pour tout chemin $p = [\ldots]$, le graphe $T(p)$ est un graphe $MPG5$.

Exemple Voir figure 26.

Remarques

1. Par la formule d'EULER numéro 4 (page 44) un graphe $MPG5$ d'ordre douze contient exactement douze sommets de degré cinq, on peut alors facilement vérifier par construction que deux graphes $MPG5$ d'ordre douze sont forcements isomorphes.

   Cela implique que le graphe $MPG5$ d'ordre douze est à la fois l'unique graphe $MPG5$ de cet ordre, le plus petit graphe $MPG5$, et l'unique graphe $MPG5$ tel que l'ensemble X_{sup6} soit vide. De ce fait, on s'intéressera exclusivement aux graphes $MPG5$ tels que l'ensemble X_{sup6} est non vide, et cela jusqu'à la fin de ce document.

2. L'objectif de ce chapitre dédié aux définitions spécifiques est de définir des transformations de manière à réduire tout graphe $MPG5$ d'ordre n à un graphe $MPG5$ d'ordre $n-1$. Or, par définition, la transformation T^{-1} n'est pas applicable à un graphe sans carré [...]. Cette observation justifie d'une part la définition des graphes sans carré [...] et d'autre part celle d'une transformation réduisant tout graphe

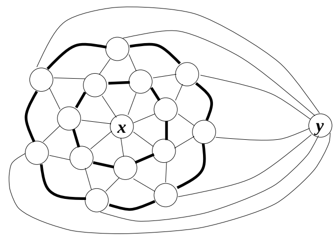

FIG. 27 - *Exemple d'un graphe de type A.*

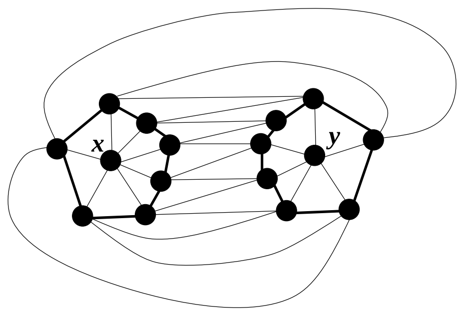

FIG. 28 - *Exemple d'un graphe de type A. (2)*

$MPG5$ d'ordre n sans carré [...] à un graphe $MPG5$ d'ordre $n-1$. Les deux prochaines sections (resp. 3.3 et 3.4) proposent un partitionnement de l'ensemble des graphes $MPG5$ (A, B et C) puis des transformations notées $(T')^{-1}$ et T'.

3.3 Graphes A, B et C

Dans cette section on définit l'ensemble des graphes $MPG5$ ne contenant pas de carré [...]. Puis on partitionne cet ensemble en deux sous-ensembles disjoints notés A et B. Les graphes de l'ensemble A possèdent en effet des propriétés à la fois fortes et immédiates. Par exemple il sera facile de proposer un algorithme permettant de tous les fabriquer. En revanche, les graphes de l'ensemble B possèdent des propriétés moins triviales, nécessitant des démonstrations.

3.3.1 Graphes A

Un graphe $MPG5$ est dit de type A, si et seulement si, $X_{sup6} \neq \emptyset$ et la distance minimale entre deux sommets distincts de degré supérieur à cinq est supérieure à deux.

Exemple On trouvera un graphe de type A sur la figure 27. Il comporte deux sommets de degré supérieur à cinq, notés x et y. Ces deux sommets sont à une distance de 3. Sur

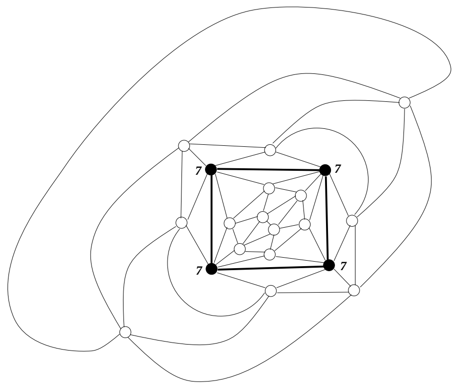

FIG. 29 - *Exemple d'un graphe de type B.*

la figure 28 on présente le même graphe, mais dessiné de manière à mettre en évidence les deux roues de sommets de degré 5, l'une autour de x, l'autre autour de y.

3.3.2 Graphes B

Soit G un graphe $MPG5$ avec $X_{sup6} \neq \emptyset$. Le graphe G est dit de type B si et seulement si il est à la fois non A et sans carré [...].

Dans un tel graphe B, H désignera le sous-graphe induit par les sommets de l'ensemble X_{sup6}.

Exemple On trouvera un graphe de type B d'ordre 20 sur la figure 29.

3.3.3 Graphes C

Soit G un graphe $MPG5$ avec $X_{sup6} \neq \emptyset$. G est dit de type C, si et seulement si, il contient au moins un carré [...] ; en d'autres termes si et seulement si il n'est ni A ni B.

Exemple On trouvera un graphe C sur la figure 30. Les graphes C apparaissent alors comme étant les graphes $MPG5$ accessibles par la transformation T ou comme les graphes $MPG5$ réductibles par la transformation T^{-1}.

Remarque Par abus de langage, on parlera d'un graphe A (respectivement d'un graphe B et C) pour signifier qu'il est de type A (resp. B et C). De même on parlera parfois, lorsque le sens est clair, de l'ensemble A (resp. B et C), pour signifier l'ensemble des graphes de type A (resp. B, et C) ; voir figure 31.

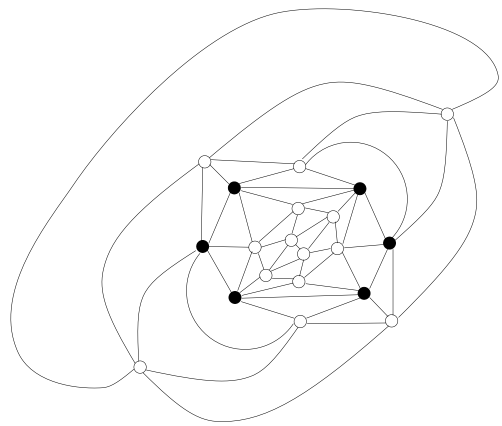

FIG. 30 - *Exemple d'un graphe de type C.*

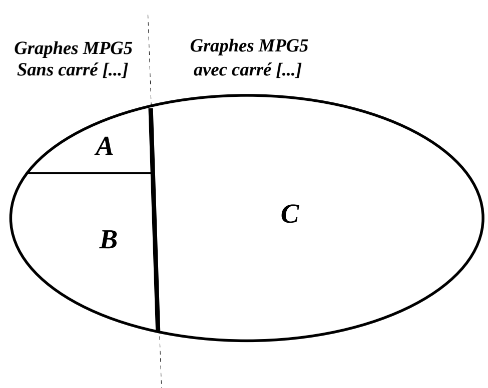

FIG. 31 - *Partition de l'ensemble $MPG5$.*

3.4 Transformations T' et $(T')^{-1}$

On rappelle que l'on cherche à définir des transformations de manière à être capable de réduire tout graphe $MPG5$ d'ordre n à un graphe $MPG5$ d'ordre $n-1$. La transformation T^{-1} par définition ne permet pas de réduire les graphes sans carrés [...] ; *i.e.* les graphes A et B. Les graphes A seront fabriqués par un algorithme très simple les générant tous. En revanche, nous n'avons pas trouvé d'algorithme aussi simple s'appliquant aux graphes B : plus complexe est la transformation, notée $(T')^{-1}$, que nous proposons pour les réduire.

Dans les deux prochaines sous-sections on présente la transformation $(T')^{-1}$ ainsi que l'objet sur lequel elle s'applique, à savoir un carré noté $\langle \ldots\ ; \ldots \rangle$.

3.4.1 Carrés $\langle \ldots\ ; \ldots \rangle$

Soit $G = (X, E)$ un graphe B et $s = z, t\ ; x, y$ un carré de G. s est un carré $\langle z, t\ ; x, y \rangle$ si et seulement si $dg(z) > 6$ et $dg(t) > 6$.

3.4.2 Transformation bascule-contraction $(T')^{-1}$

Soit G un graphe B et s un carré $\langle z, t\ ; x, y \rangle$ de G. La transformation $(T')^{-1}(s)$ réalise successivement $D(z, t)$ puis $T^{-1}(x, y\ ; z, t)$.

On peut vérifier que pour tout carré $s = \langle \ldots \rangle$, le graphe $(T')^{-1}(s)$ est un graphe $MPG5$.

Exemple Voir figure 33.

Remarque Dans la suite on définit la transformation inverse de $(T')^{-1}$ notée T', de manière à ce que le graphe après l'application de T' soit à coup sûr un graphe B. Cette contrainte est assez pesante ce qui explique la lourdeur de la définition de l'objet sur lequel s'applique T' : un chemin $\langle \ldots \rangle$.

On pourra alors prouver que pour tout chemin $p = \langle \ldots \rangle$ le graphe $T'(p)$ est un graphe B.

3.4.3 Chemins $\langle \ldots \rangle$

Soit $G = (X, E)$ un graphe $MPG5$ et v un sommet de degré supérieur à sept, tel que son premier voisinage puisse être décrit par la liste suivante,

$$N(v) = (b, a, z, d, e, f, t, c, \ldots)$$

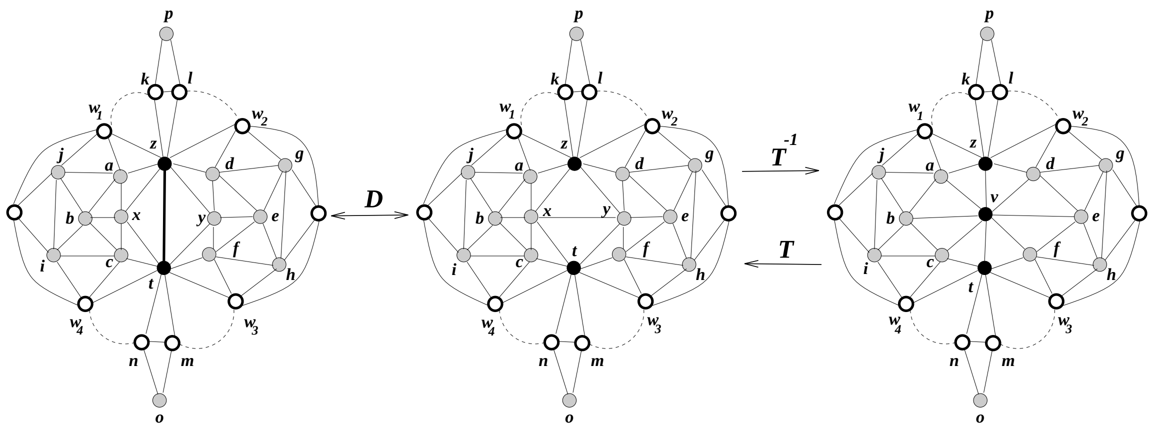

FIG. 32 - *Transformations* T' *et* $(T')^{-1}$.

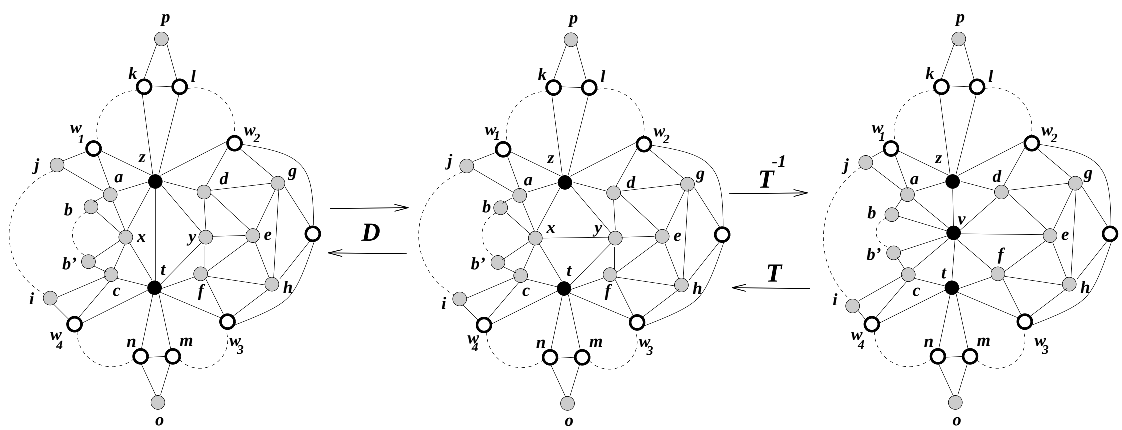

FIG. 33 - *Transformations* T' *et* $(T')^{-1}$. *(2)*

où les sommets a, b, c, d, e, f sont dans l'ensemble X_{inf6} (cf. la figure 32). Le chemin $[v\,;z,t]$ sera noté $\langle v\,;z,t\rangle$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées,

1. $dg(v) \geq 8$.

2. Si le graphe G est de type C alors on distingue deux cas :

   – $dg(v) = 8$ (cf. figure 32) : Les seuls carrés $[\ldots]$ existant dans le graphe G, sont parmi les quatre suivants : $[a,z\,;v,w_1]$, $[z,d\,;v,w_2]$, $[t,f\,;v,w_3]$ et $[c,t\,;v,w_4]$.

   – $dg(v) > 8$ (cf. figure 33). D'une part le sommet $b, b' \in X_{inf6}$ et d'autre part il y a au plus deux carrés $[\ldots]$ dans le graphe G, décrits par $[z,d\,;v,w_2]$, $[t,f\,;v,w_3]$.

3. Si $dg(z) = 5$ (resp. $dg(t) = 5$) alors le sommet $p \in X_{inf6}$ (resp. $o \in X_{inf6}$).

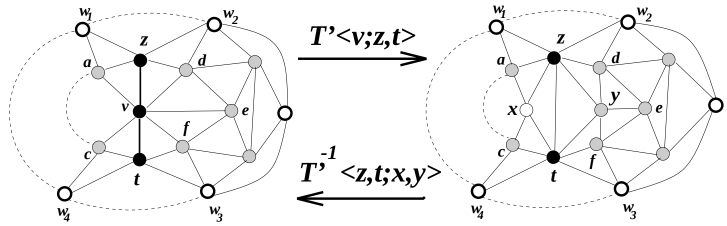

FIG. 34 - *Transformations T' et $(T')^{-1}$. (3)*

Remarques

1. Si $dg(z) = 5$ alors (cf. figures 32 et 33), le sommet w_1 est confondu avec le sommet k, et le sommet l avec le sommet w_2. De la même manière si $dg(t) = 5$ le sommet w_3 est confondu avec le sommet m, et le sommet n avec le sommet w_4.

2. Un chemin $\langle v\ ; z, t\rangle$ est aussi un chemin $[v\ ; z, t]$. En revanche, la réciproque n'est pas nécessairement vraie : d'une part il sera possible d'appliquer l'explosion T sur des chemins du type $\langle v\ ; z, t\rangle$; d'autre part l'ensemble des chemins du type $[\ldots]$ contient l'ensemble des chemins $\langle\ldots\rangle$.

3.4.4 Transformation explosion-bascule T'

Soit G un graphe $MPG5$, et $p = \langle v\ ; z, t\rangle$ un chemin. Le graphe $T'(p)$ est obtenu par application successive de $T(p)$ (qui *"explose"* v en x et y), puis de $D(x, y)$. Voir figure 33.

On peut vérifier que pour tout chemin $p = \langle\ldots\rangle$, $T'(p)$ est un graphe $MPG5$.

Exemple Voir figure 33.

Proposition 3 *Soit $G = (X, E)$ un graphe $MPG5$ et $p = \langle v\ ; z, t\rangle$ un chemin. $T'(p)$ est un graphe de type B.*

Preuve La structure de la preuve est calquée sur celle de la définition d'un chemin $\langle\ldots\rangle$. On distingue donc deux cas, suivant le degré du sommet v.

1. Supposons $dg_G(v) = 8$. Par définition d'un chemin $p = \langle v\ ; z, t\rangle$, tel que $dg(v) = 8$, les seuls carrés existants sont parmi les quatre suivants (en utilisant la notation précédente ; *i.e.* sur la figure 32 à droite) : $[a, z\ ; v, w_1]$, $[z, d\ ; v, w_2]$, $[t, f\ ; v, w_3]$ et $[c, t\ ; v, w_4]$.

   Soit $G' = T(p)$. Par définition de la transformation explosion T appliquée sur p, dans le graphe G, on "explose" le sommet v en deux sommets x, y. Ceux-ci sont tous deux de degré six et tels que leur premier voisinage, dans le sens indirect, est défini par les listes suivantes,

$$(N_{G'}(y) = (z, d, e, f, t, x)) \text{ et } (N_{G'}(x) = (a, z, y, t, c, b)).$$

On énumère les carrés [...] existant dans le graphe G'.

D'une part, il y a exactement 4 sommets dont la valence a changé entre G et G' ; ils sont notés x, y, z et t (en particulier, on a $dg_{G'}(x) = dg_{G'}(y) = 6$) ; d'autre part puisque dans le graphe G, par définition d'un chemin $\langle \ldots \rangle$, les seules carrés [...] existant (au plus 4) contiennent le sommet v ; alors dans le graphe G' tous les carrés [...] contiennent au moins un sommet parmi z, t, x et y.

Par l'absurde. Supposons que dans le graphe G' il existe un carré [...] ayant aucun sommet commun avec les 4 pré-cités, *i.e.* z, t, x, et y. Aussitôt, cela implique que d'une part celui-ci existe dans le graphe G et d'autre part que celui-ci ne contient pas le sommet v dans G. Il y a contradiction.

Donc tous les carrés [...] dans G' ont un sommet commun avec z, t, x, et y. On énumère tous ces carrés, mais auparavant on énumère ceux de la forme $\ldots ; \ldots$. Afin de mieux les distinguer à la lecture, et puisque cela n'engendre pas de confusions, les carrés $\ldots ; \ldots$ seront notés $(\ldots ; \ldots)$.

(a) Les carrés contenant les sommets x et, ou y.

  i. Les carrés contenant le sommet x.

  – Les carrés $(\ldots ; x, \ldots)$:
  $(a, z; w_1, x)$, $(a, b; j, x)$, $(b, c; i, x)$, $(c, t; w_4, x)$, $(t, y; f, x)$, $(z, y; d, x)$

  – Les carrés $(x, \ldots ; \ldots)$:
  $(x, z; a, y)$, $(x, y; z, t)$, $(x, f; c, y)$, $(x, c; b, t)$, $(b, x; a, c)$, $(a, x; b, z)$

  ii. Idem pour le sommet y.

(b) Les carrés contenant les sommets z et t.

  i. Supposons que dans le graphe G, $x, y \in X_{sup6}$. Clairement dans G', on a $x, y \in X_{sup6}$. Puisque l'appartenance à l'ensemble X_{sup6} des 2 sommets z et t, ne change pas entre G et G', cela signifie qu'il n'y a pas de nouveau carré [...] les contenant dans G'. En d'autres termes, il n'existe pas dans G' de carré [...] (avec z ou t) n'existant pas dans G.

ii. Supposons $dg_G(z) = dg_G(t) = 5$. On énumère les carrés $\ldots;\ldots$ contenant ces 2 sommets.

A. Les carrés contenant le sommet z.

– Les carrés $(\ldots; z, \ldots)$:
$(w_1, w_2; p, z)$, $(a, w_1; j, z)$, $(a, x; b, z)$, $(x, y; z, t)$, $(y, d; z, e)$, $(w_2, d; z, g)$

– Les carrés $(z, \ldots; \ldots)$:
$(z, w_1; w_2, a)$, $(z, w_2; w_1, d)$, $(z, d; y, w_2)$, $(z, y; d, x)$, $(z, x; a, y)$, $(z, a; x, w_1)$

B. Idem pour le sommet t.

iii. On laisse au lecteur l'énumèration des carrés dans les 2 cas restants ; c'est-à-dire quand $dg_G(z) = 5$, $t \in X_{sup6}$ et $dg_G(t) = 5$, $z \in X_{sup6}$. Ces 2 cas étant une combinaison des 2 cas étudiés précédemments, *i.e.* 1(b)i et 1(b)ii.

A la suite de cette énumération, il apparaît que les seuls carrés [...] du graphe G' (au plus 5) pouvant exister sont les suivants,

$$[a, z \,; w_1, x], \; [c, t \,; w_4, x], \; [z, d \,; w_2, y], \; [t, f \,; w_3, y], \; [x, y; z, t].$$

On applique alors la transformation diagonale sur l'arête (x, y) du graphe G', on note G'' ce nouveau graphe ; *i.e.* $G'' = D(x, y)$. Alors, $dg_{G''}(x) = dg_{G''}(y) = 5$. Cela implique que les cinq derniers carrés [...] précédents sont éliminés (dans le sens où ils ne sont plus de type [...]). On recherche alors si, entre le graphe G' et le graphe G'', la transformation D a engendré de nouveaux carrés [...].

Par définition de la transformation diagonale, seuls quatre sommets ont leur (premier) voisinage modifié. Ainsi, les nouveaux carrés dans le graphe G'' par rapport à ceux dans le graphe G', s'ils existent, ne peuvent être que parmi les suivants : $(x, z \,; a, t)$, $(z, y \,; d, t)$, $(x, t \,; c, z)$, $(t, y \,; z, f)$. Clairement, aucun de ces quatre carrés n'est de type [...] puisque,

$$dg_{G''}(a) = dg_{G''}(d) = dg_{G''}(f) = dg_{G''}(c) = 5.$$

On peut donc affirmer que dans le graphe G'', il n'existe plus de carré de type [...] ; *i.e.* le graphe G'' est soit A soit B.

On montre que G'' est non A. Supposons que $dg_G(z) = i$ et $dg_G(t) = j$; alors $dg_{G''}(z) = i + 2$ et $dg_{G''}(t) = j + 2$. Le graphe G étant un graphe $MPG5$, cela implique $i \geq 5$ et idem pour j. Donc dans le graphe G'' l'arête (z, t) a ses extrémités dans X_{sup6}. Donc G'' est non A par définition.

En conclusion le graphe G'' possède des sommets de degré supérieur à cinq, il est sans carré [...], et il n'est pas de type A ; par définition G'' est un graphe B.

2. Supposons $dg_G(v) > 8$. Cette partie de la preuve, similaire à la précédente, est laissée au lecteur.

$\square$

3.5 Conclusion

Ce chapitre a proposé une partition des graphes $MPG5$, en trois sous-ensembles disjoints A, B et C, basée sur l'existence ou non de carré [...]. Les graphes $MPG5$ avec carré [...] sont les graphes C, les autres sont partagés en deux sous-ensembles A et B.

Tous les graphes C possèdent par définition un carré [...] ; donc ceux-ci d'ordre n sont réductibles par T^{-1} à un graphe $MPG5$ d'ordre $n-1$. Naturellement, l'inverse est vrai : T permet de construire les graphes C d'ordre n à partir des graphes $MPG5$ d'ordre $n-1$.

Les graphes A, on le verra, ont l'avantage de pouvoir être fabriqués directement par un algorithme très simple. Il est donc utile de les distinguer de leurs homologues sans carré [...]. Dans la partie suivante, on montrera justement comment construire ces derniers.

On a établi que tout graphe B d'ordre n contenant un carré $\langle \ldots \rangle$ était réductible par $(T')^{-1}$ à un graphe $MPG5$ d'ordre $n-1$. Ceci étant, l'existence d'un tel carré n'est pas prouvée ; de fait, dans la partie suivante, on verra que certains graphes de type B n'en contiennent aucun ; on donnera alors une autre caractérisation, plus féconde, de ces graphes B non réductibles par la bascule-contraction $(T')^{-1}$.

Deuxième partie

Générer les graphes $MPG5$

Chapitre 1

Construire les graphes A

Dans ce chapitre on fournit un algorithme pour générer les graphes A. On donne aussi quelques propriétés sur ces graphes. En utilisant ces propriétés on décrit le fils d'un graphe A par l'explosion T. Ce fils est dit de type A^T. Dans la suite ces deux types de graphes ainsi que les propriétés présentées dans ce chapitre seront employés à la preuve d'un algorithme conçu pour construire tous les graphes $MPG5$.

Rappel On s'intéresse seulement aux graphes $MPG5$ connexes tels que $|X_{sup6}| > 0$.

1.1 Propriété caractéristique des graphes A

La définition des graphes A de la page 50 utilise la notion de distance entre sommets et celle du ième-voisinage noté N^i est décrite à partir de celle de la distance $d(\ldots)$. On présente ici une propriété caractéristique des graphes A liée à la notion de ième-voisinage.

Théorème 4 *Soit G un graphe $MPG5$ d'ordre n. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *G est de type A.*

(ii) *$\exists x \in X_{sup6}$ tel que $(N(x) \cup N^2(x)) \subseteq X_{inf6}$.*

Preuve

$(ii) \Rightarrow (i)$ On va montrer de manière constructive que si dans un graphe $MPG5$ il existe un sommet x de l'ensemble X_{sup6} qui vérifie (ii) alors ce graphe est de type A.

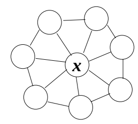

Fig. 35 - *Exemple : première étape, $k = 7$.*

Soit G un graphe $MPG5$ et un sommet $x \in X_{sup6}$ de degré k, vérifiant (ii). On se propose de fabriquer G en trois étapes. On construit la roue de centre x et comportant k sommets sur la face extérieure. Sur la figure 35, on a donné un exemple avec $k = 7$.

Pour l'instant, les sommets situés sur la face extérieure de la roue sont de degré 3.

Par hypothèse, on doit avoir $N(x) \subset X_{inf6}$. En conséquence, il faut rajouter deux arêtes pour chaque sommet de $N(x)$ de manière à ce que tous ces sommets soient finalement de degré cinq. Le fait que le graphe G soit par hypothèse $MPG5$ et $N(x) \subset X_{inf6}$ implique l'égalité suivante

$$|N(x)| = |N^2(x)| = k,$$

voir figure 36. Maintenant tous les k sommets de $N^2(x)$ ont un degré quatre.

Par hypothèse, on doit avoir $N^2(x) \subset X_{inf6}$. Donc entre le second et le troisième voisinage de x il faut rajouter exactement une arête pour chaque sommet de $N^2(x)$. De ce fait, le troisième voisinage doit être constitué d'un unique sommet, noté y. Celui-ci a un degré k puisque $|N^2(x)| = k$; d'autre part $N^w(x) = \emptyset$ pour $w > 3$.

On a donc montré que s'il existe, dans un graphe $MPG5$, un sommet $x \in X_{sup6}$ qui vérifie la condition (ii) alors ce graphe est de type A. On a présenté le graphe A avec $k = 7$ sur la figure 37.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Il faut montrer que si le graphe G est A alors il existe un sommet x de l'ensemble X_{sup6} qui vérifie (ii).

En effet, dans ce cas, tout sommet de X_{sup6} a par définition son premier et son second voisinage inclus dans l'ensemble X_{inf6} ; autrement dit, la condition (ii) est vérifiée par tout sommet de l'ensemble X_{sup6}, donc *a fortiori* par un sommet.

□

Du théorème précédent et de sa démonstration, on peut tirer trois corollaires dont les preuves, évidentes, seront laissées au lecteur.

Corollaire 5 *Un graphe de type A est d'ordre pair. Il a exactement deux sommets dans l'ensemble X_{sup6}. Si on les note x et y, on a l'égalité suivante :*

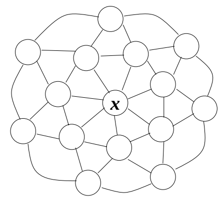

FIG. 36 - *Exemple : deuxième étape, $k = 7$.*

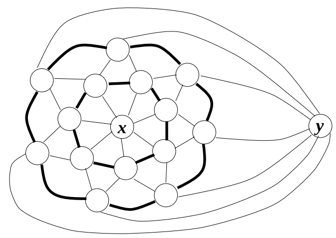

FIG. 37 - *Le graphe de type A avec $\Delta = 7$.*

$$\Delta(G) = \frac{n-2}{2} = dg(x) = dg(y).$$

($\Delta(G)$ représente le plus grand degré du graphe G.)

Corollaire 6 *Soit G le plus petit graphe de type A. G est d'ordre 14, et $\Delta(G) = 6$.*

Corollaire 7 *Tous les graphes de type A de même ordre sont isomorphes.*

Remarque Dans [Rol96], nous avons donné un algorithme simple qui colore tout graphe de type A avec 4 couleurs.

L'algorithme 38 utilise le procédé constructif de la preuve précédente afin de générer un graphe de type A avec $n = (2 \times k) + 2$ sommets.

1.2 Graphes A^T

On définit la structure des fils d'un graphe de type A par l'explosion T.

Définition 8 *Un graphe est de type A^T si et seulement si il existe un carré $s = [\ldots]$ tel que $T^{-1}(s)$ est un graphe A.*

On donne la structure générale d'un graphe A^T sur la figure 39, où

$$\forall x \in X - \{a, b, y, z, t\},\ x \in X_{inf6}$$

Entrée : Un entier $k > 5$.
Sortie : Un graphe A d'ordre $n = 2(k+1)$.
Nom : `Générer le graphe` A (k)

Début
Soient x et y deux sommets
Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ la liste des sommets
    dans le sens indirect de la roue de centre x
Soit $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ la liste des sommets
    dans le sens direct de la roue de centre y
Pour $i \leftarrow 1$ **à** $(k-1)$ **Faire**
    `Ajouter arêtes` (x_i, y_i), (x_i, y_{i+1})
Fin Pour
`Ajouter arêtes` (x_k, y_k), (x_k, y_1)
Fin

Alg. 38 - *Construire un graphe de type A.*

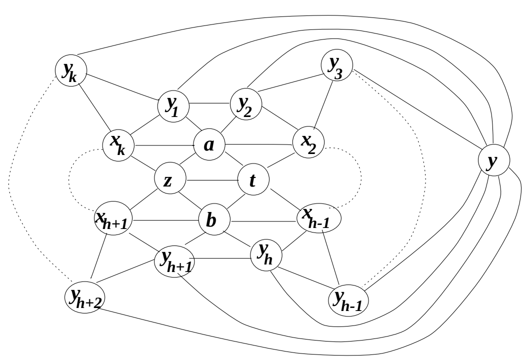

Fig. 39 - *Structure d'un graphe A^T.*

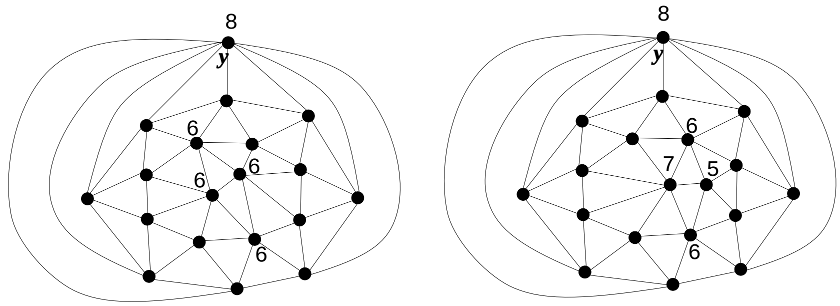

FIG. 40 - *Exemple de deux graphes A^T de même ordre mais non isomorphes.*

Puisque le plus petit graphe de type A possède 14 sommets, le plus petit graphe A^T est d'ordre 15. On peut vérifier *à la main* qu'il est l'unique graphe $MPG5$ d'ordre 15.

Des propriétés des graphes A découlent quelques propriétés (immédiates) des graphes A^T.

Soit G' un graphe A^T d'ordre n'. On utilise la notation de la figure 39.

1. Le nombre de sommets n' de G' est impair et $\Delta(G') = \frac{n'-3}{2}$.

2. $dg(a) = dg(b) = 6$ et $dg(z) + dg(t) - 4 = dg(y) = \Delta(G')$.

3. Pour $n' > 15$, il existe un seul sommet de degré $\Delta = \frac{n'-3}{2}$; sur la figure 40 c'est le sommet y de degré 8.

   On peut vérifier *à la main* que pour $n' = 15$, on a $\Delta = 6$ et $dg(a) = dg(b) = dg(y) = 6$, les autres sommets étant de degré cinq.

4. Il y a $\frac{\Delta-4}{2} = \frac{n'-11}{4}$ graphes non isomorphes de type A^T d'ordre n'. On donne les deux graphes A^T d'ordre 19 non isomorphes sur la figure 40.

5. Dans un graphe de type A^T il y a exactement trois carrés [...]; voir figure 39. Précisément, ces trois carrés sont les suivants :

   (a) $\pi^1 = [z, t\ ; a, b]$

   (b) $\pi^2 = [y_1, y_2\ ; a, y]$

   (c) $\pi^3 = [y_h, y_{h+1}\ ; b, y]$

6. On peut facilement distinguer le carré π^1 des deux autres carrés pour $n' > 15$.

   En effet les deux autres carrés notés π^2 et π^3 possèdent en commun le sommet y qui a un degré égal à $\Delta = \frac{n'-3}{2}$. Puisqu'il n'existe qu'un unique sommet de degré Δ pour $n' > 15$, on peut facilement identifier π^1.

7. Pour $n' = 15$, les trois carrés π^1, π^2 et π^3, sont transformés par T^{-1} en le même graphe : le plus petit type A.

8. Pour $n' > 15$, on peut vérifier les propriétés suivantes :

   (a) $T^{-1}(\pi^1)$ est un graphe A.

   (b) Les deux graphes $T^{-1}(\pi^2)$ et $T^{-1}(\pi^3)$ sont de type C. En effet puisque $n' > 15$ (et donc que $dg(y) > 6$), le graphe $G' = T^{-1}(\pi^2)$ (resp. $G' = T^{-1}(\pi^3)$) contient le carré π^3 (resp. π^2). On pourra aussi vérifier que les deux graphes $T^{-1}(\pi^2)$ et $T^{-1}(\pi^3)$ sont isomorphes.

On définit un graphe de type A^T unique pour un ordre impair supérieur à quinze.

Parmi tous les graphes A^T d'ordre supérieur à 15, il est utile de distinguer en particulier :

Définition 9 *Soit $n' > 15$, $A^T_{min}(n')$ désigne le graphe A^T d'ordre n' tel que $|X_{sup6}| = 4$.*

Remarque Avec les notations de la figure 39, dans un graphe $A^T_{min}(n')$ tel que $X_{sup6} = \{z, y, a, b\}$, et $dg(y) = \Delta$, on a $dg(z) = \Delta - 1$ et $dg(a) = dg(b) = 6$.

Exemple Le graphe $A^T_{min}(19)$ est le graphe de droite sur la figure 40.

Chapitre 2

Etude des graphes B

On rappelle que l'on cherche à réduire tout graphe B d'ordre n à un graphe $MPG5$ d'ordre $n-1$. Par définition de la bascule-contraction $(T')^{-1}$ les graphes B contenant au moins un carré $s = \langle \ldots \rangle$ sont ainsi réductibles. Dans la perspective de réduire tous les graphes $MPG5$, il faut définir formellement les graphes B ne contenant pas de tel carré $\langle \ldots \rangle$. Ce chapitre va permettre de mettre en évidence un ensemble de propriétés sur ces graphes. Les propriétés recherchées devront faire apparaître des outils pour la réduction de ceux-ci.

2.1 Propriétés caractéristiques des graphes B

Soit G un graphe de type B. Par définition le graphe G est non A, sans carrés $[\ldots]$ et X_{sup6} est non vide.

On considère (z, t) une arête du graphe G. Puisque le graphe G est $MPG5$, cette arête borde deux triangles distincts. On note a et b les deux voisins communs aux deux sommets z, t. D'autre part le graphe G est par hypothèse de type B, donc il n'y a pas de carrés $[\ldots]$. En conséquence, au moins un des deux sommets a et b appartient à l'ensemble X_{inf6}. Supposons $dg(b) = 5$.

On énumère les trois cas suivant le degré de z et celui de t (*i.e.* $z, t \in X_{sup6}$; $z, t \in X_{inf6}$ et $z \in X_{sup6}$, $t \in X_{inf6}$) [1] , de manière à déterminer une propriété caractérisant les graphes de type B.

1. Supposons $z, t \in X_{sup6}$. Puisqu'il n'existe pas de carrés $[\ldots]$, le voisinage du sommet z peut être décrit dans le sens indirect par la liste suivante :

$$N(z) = (y^1, b, t, a, y^2, y^3, \ldots, y^{dg(z)-3})$$

1. Le cas $t \in X_{sup6}$, $z \in X_{inf6}$ est symétrique au cas $z \in X_{sup6}$, $t \in X_{inf6}$.

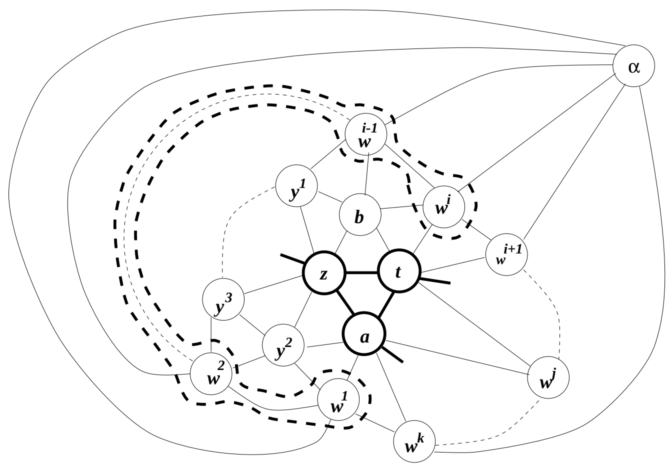

FIG. 41 - *Triangle formé de sommets de l'ensemble X_{sup6} au sein d'un graphe B.*

où les sommets y^1, y^2 et y^3 appartiennent à l'ensemble X_{inf6} ; voir figure 41. On montre maintenant que sous ces hypothèses, il existe dans $N(z) \cap X_{sup6}$ au moins un sommet autre que t et a ; *i.e.* on veut montrer que

$$|N(z) \cap X_{sup6}| \geq 3.$$

Par l'absurde. Supposons qu'entre les sommets y^3 et y^1 dans le sens indirect, il n'existe pas de sommets qui appartiennent à l'ensemble X_{sup6} ; c'est-à-dire,

$$\forall q \in [1, dg(z) - 3],\ y^q \in X_{inf6}.$$

On décrit le second voisinage de z par $N^2(z) = (w^1, \dots w^k)$, de manière à ce que les deux sommets w^i, z (respectivement w^1, z) soient les deux voisins communs à b et t (resp. à y^2 et a).

On considère alors le sous-graphe G' induit par les sommets de l'ensemble $N(z) \cup N^2(z)$. Le sous-graphe G' correspond au graphe de la figure 41 en retirant toutefois le sommet α. On note alors V l'ensemble des sommets w^p avec $p \in [1, i]$. Les sommets w^p sont situés à *l'intérieur* de l'ensemble en pointillés gras de la figure 41.

Puisque par hypothèse les sommets b et y^q avec $q \in [1, dg(z) - 3]$ appartiennent à l'ensemble X_{inf6}, chaque sommet de l'ensemble V a un degré quatre dans le graphe G'.

Dans le graphe G, les sommets w^p doivent être de degré cinq ; en effet, car s'il existe un sommet w^p tel que $w^p \in \{V \cap X_{sup6}\}$ alors le graphe G contient le carré $[\ldots ; w^p, z]$.

Donc à partir du graphe G', chaque sommet de l'ensemble V se voit ajouter exactement un voisin dans le graphe G. Par triangulation ce sommet, noté α, doit être unique pour tous les sommets de l'ensemble V.

L'étape précédente a consisté à placer les arêtes (w^p, α) avec $p \in [1, i]$. Pour le moment, z étant dans l'ensemble X_{sup6}, on a $i \geq 5$, donc $dg(\alpha) \geq 5$ (cf. figure 41).

Afin d'enfermer les sommets w^1 et w^i de manière à ce qu'ils soient tous deux de degré cinq dans le graphe G, il faut ajouter les arêtes (w^{i+1}, α) et (w^k, α) ; car, sinon, il apparaît les carrés $[y^2, a ; z, w^1]$ et $[b, t ; z, w^i]$.

Ces deux arêtes (w^{i+1}, α) et (w^k, α) sont différentes : en effet, si $w^{i+1} = w^k$, alors $dg(t) = dg(a) = 5$ et il y a contradiction puisque par hypothèse $a, t \in X_{sup6}$.

De cette dernière remarque, $dg(\alpha) \geq 6$, *i.e.* $\alpha \in X_{sup6}$. Le graphe courant contient dès lors les deux carrés suivants :

$$[w^i, w^{i+1} ; t, \alpha] \text{ et } [w^1, w^k ; a, \alpha].$$

Il y a une contradiction puisque par hypothèse le graphe est B et donc sans carré [...].

On a ainsi montré que s'il existe une face vide $z, t, a \in X_{sup6}$ alors le sommet z possède au moins trois voisins dans l'ensemble X_{sup6}. C'est-à-dire $|N(z) \cap X_{sup6}| \geq 3$.

Ce résultat est immédiatement applicable sur les deux autres sommets a et t. C'est-à-dire que pour chacun de ces trois sommets z, t et a, il existe au moins un autre sommet dans leur premier voisinage et dans l'ensemble X_{sup6}. Précisément,

$$\forall s \in \{z, t, a\}, |N(s) \cap X_{sup6}| \geq 3.$$

Remarque Puisque le graphe G est de type B, le premier voisinage du sommet a (resp. t), en utilisant les précédentes notations, est tel que les sommets y^2, w^1 et w^{j+1}, w^j (resp. w^j, w^{j-1} et w^i, b) appartiennent à l'ensemble X_{inf6} ; voir figure 42. Cela implique qu'il n'existe pas de graphes de type B contenant deux triangles composés de sommets de l'ensemble X_{sup6} ayant une arête commune. Cela est naturel puisque deux triangles définis ainsi forment un carré [...].

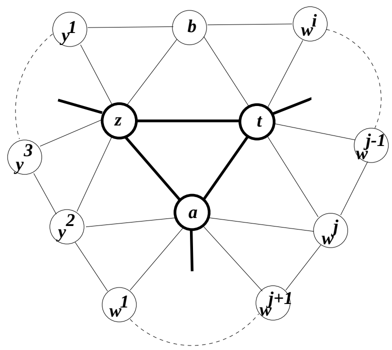

FIG. 42 - *Premier voisinage d'un triangle formé de sommets de l'ensemble X_{sup6} au sein d'un graphe B*

2. Supposons $z \in X_{sup6}$ et $t \in X_{inf6}$. Il y a deux cas.

   (a) Supposons que le premier voisinage du sommet z dans le sens indirect puisse s'écrire par la liste suivante,

   $$N(z) = (\ldots, b, t, a, x^1, \ldots),$$

   avec le sommet $x^1 \in X_{sup6}$. Ce cas est analogue au cas 1. Car on a alors un triangle vide z, a, x^1 dans le graphe G, tel que les trois sommets appartiennent à l'ensemble X_{sup6}.

   (b) Supposons que le premier voisinage du sommet z dans le sens indirect puisse s'écrire par la liste suivante,

   $$N(z) = (b, t, a, y^1, y^2, \ldots, y^{dg(z)-3}),$$

   avec $y^1, y^2 \in X_{inf6}$; voir la figure 43. On veut montrer qu'avec ces descriptions, il existe au moins un autre sommet différent du sommet a dans $N(z) \cap X_{sup6}$; c'est-à-dire,

   $$|N(z) \cap X_{sup6}| \geq 2.$$

   Par l'absurde. Supposons que, dans le sens indirect, entre les sommets y^2 et b, il n'existe pas de sommets qui appartiennent à l'ensemble X_{sup6} ; en d'autres termes, que

   $$\forall q \in [1, dg(z) - 3],\ y^q \in X_{inf6}.$$

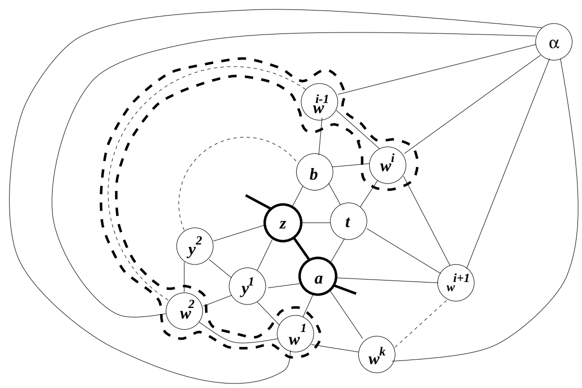

FIG. 43 - *Une arête de H dans un graphe B.*

On décrit le second voisinage de z dans le sens indirect par $N^2(z) = (w^1, \ldots w^k)$, de façon que les deux sommets w^i, z (resp. w^1, z) soient les deux voisins communs à b et t (resp. à y^1 et a).
On considère alors le sous-graphe G' induit par les sommets de $N(z) \cup N^2(z)$. On note V l'ensemble des sommets w^p avec $p \in [1, i]$; ces sommets sont dans l'ensemble en pointillés gras de la figure 43.
Tous les sommets de V ont d'une part un degré quatre dans le graphe G', puisque les sommets b et y^q $(q \in [1, dg(z) - 3])$ appartiennent à l'ensemble X_{inf6} et d'autre part un degré cinq dans le graphe G, car sinon s'il existait un sommet w^p à la fois dans l'ensemble V et dans l'ensemble X_{sup6} il y aurait un carré $[\ldots\ ; z, w^p]$.
Donc il existe un sommet α, tel que $\forall p \in [1, i]$, (w^p, α) est une arête du graphe G et z étant dans l'ensemble X_{sup6}, on a $i \geq 5$, donc $dg(\alpha) \geq 5$.
Afin d'enfermer les sommets w^1 et w^i de manière à ce qu'ils soient tous deux de degré cinq, on doit ajouter les arêtes (w^{i+1}, α) et (w^k, α). L'ajout de ces deux arêtes implique $dg(\alpha) \geq 6$.
Puisque $\alpha \in X_{sup6}$, on a le carré $[w^1, w^k\ ; a, \alpha]$.
Il y a une contradiction puisque par hypothèse le graphe G est de type B et donc sans carrés $[\ldots]$.

Donc sous les hypothèses $2b$, il existe dans $N(z) \cap X_{sup6}$ au moins un sommet distinct de a ; précisément,

$$|N(z) \cap X_{sup6}| \geq 2.$$

Remarque Les sommets a et z jouent le même rôle : le sommet a possède lui aussi la propriété $|N(a) \cap X_{sup6}| \geq 2$. On peut dès lors conclure que dans un graphe H, *i.e.* le sous-graphe induit par les sommets de l'ensemble X_{sup6} d'un graphe B, il n'existe pas de sommets pendants. En d'autres termes, soit G un graphe de type B,

$$\nexists x \in X_{sup6},\ dg_H(x) = 1.$$

3. Supposons $z, t \in X_{inf6}$. Il y a deux cas :

   (a) $N(a) \cap X_{sup6} \neq \emptyset$. Ce cas se ramène soit au cas 1 soit au cas 2*b*.

   (b) $N(a) \cap X_{sup6} = \emptyset$. Puisque par hypothèse il n'existe pas de carrés [...], le second voisinage du sommet a doit être inclus dans l'ensemble X_{inf6}. En effet, supposons qu'il existe un sommet α dans $N^2(a) \cap X_{sup6}$. On a alors immédiatement le carré $[z, t\ ; a, \alpha]$.

   De cette dernière remarque, on tire :

$$\Big(N(a) \cup N^2(a)\Big) \subseteq X_{inf6}.$$

   On utilise alors le théorème 4 de la page 61. Puisqu'il existe un sommet de X_{sup6} avec son premier et son second voisinage inclus dans l'ensemble X_{inf6}, le graphe est A. Il y a contradiction, puisque par hypothèse le graphe G est de type B ; et donc par définition non A.

   Ainsi dans un graphe B, il n'existe pas de sommets de X_{sup6} avec son premier voisinage dans X_{inf6}. Cela peut être traduit de la manière suivante : le graphe H ne contient pas de sommets isolés. En d'autres termes, soit G un graphe de type B,

$$\nexists x \in X_{sup6},\ dg_H(x) = 0.$$

De cette énumération on tire de manière immédiate une propriété intéressante des graphes de type B (pour les notations se reporter à la figure 44) :

Lemme 10 *Soit G un graphe de type B tel que, pour tout sommet $x \in X_{sup6}$ la liste du premier voisinage de x s'écrive dans le sens indirect,*

$$N(x) = \Big((x^1, y^1_1, \ldots, y^1_{j_1}), \ldots, (x^i, y^i_1, \ldots, y^i_{j_i}), \ldots, (x^k, y^k_1, \ldots, y^k_{j_k})\Big)$$

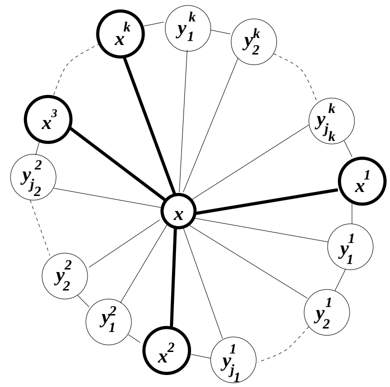

FIG. 44 - *Voisinage d'un sommet $x \in X_{sup6}$ dans un graphe B.*

Alors, les trois assertions suivantes sont vérifiées :

1. $k = dg_H(x) \geq 2$;

2. $\forall i \in [1, k]$, $x^i \in X_{sup6}$, $y_q^i \in X_{inf6}$, $q \in [1, j_i]$, *et* $j_i \geq 0$;

3. *Si* $\exists i \in [1, k]$ *tel que* $j_i = 0$ *alors*

   (a) *Si* $(i \neq 1)$ *et* $(i \neq k)$ *alors* $j_{i-1} > 0$ *et* $j_{i+1} > 0$.

   (b) *Si* $i = 1$ *alors* $j_k > 0$ *et* $j_2 > 0$.

   (c) *Si* $i = k$ *alors* $j_{k-1} > 0$ *et* $j_1 > 0$.

La troisième assertion de ce lemme est justifiée par le fait que dans un graphe de type B, il n'existe pas de carré [...].

Dans la suite de ce chapitre on va montrer que tous les graphes de type B peuvent être vus comme un certain assemblage de certains sous-graphes notés M_3, M_3^{vide}, M_4 et M_5.

Le lemme suivant va nous permettre de préciser les valeurs possibles pour j_i, et de définir les quatre sous-graphes en question.

Lemme 11 *Soit G un graphe B et x un sommet de X_{sup6} alors,*

$$\forall i \in [1, dg_H(x)]\,,\ j_i = \{0, 2, 3\}$$

Preuve Avec les notations du lemme précédent, on énumère toutes les valeurs possibles de j_i en considérant cinq cas $(0, 1, 2, 3, > 3)$. Soit $i \in [1, dg_H(x)]$:

1. Supposons $j_i = 0$. On note M_3^{vide} le triangle vide délimité par les sommets x, x^i, x^{i+1} de X_{sup6}. A la suite de la description du premier cas de la page 67, on a

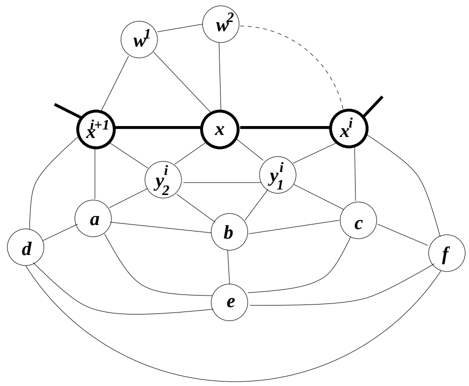

FIG. 45 - *Chemin de longueur deux dans H et $j_i = 2$.*

$$\forall s \in \left\{x, x^i, x^{i+1}\right\}, \, k = dg_H(s) \geq 3$$

2. Supposons $j_i = 1$. Il existe un carré [...], lequel, avec la notation de la figure 44 est $\left[x, y_1^i \,;\, x^i, x^{i+1}\right]$.

   Il y a contradiction puisque par hypothèse le graphe courant est B. En conséquence dans un graphe B, pour aucun sommet $x \in X_{sup6}$, il n'existe d'indice $i \in [1, dg_H(x)]$ avec $j_i = 1$.

3. Supposons $j_i = 2$. Pour plus de lisibilité on donne la figure 45 illustrant le voisinage du sommet x.

   Puisque par hypothèse le graphe G est de type B, il n'y a pas de carrés [...], donc les sommets y_1^i, y_2^i, a, b, c, e sont dans X_{inf6}. Cette remarque explique une partie de la topologie de la figure 45. On va commenter le reste de cette même figure.

   Soit G un graphe de type B contenant le sous-graphe G' dessiné sur la figure 45. Selon les degrés de d et f, on a :

   (a) Supposons $d, f \in X_{inf6}$. Dans le graphe G', on a l'égalité $dg_{G'}(d) = dg_{G'}(f) = 4$. Donc il existe un sommet α tel que les arêtes (d, α), (f, α) appartiennent au graphe G.

   En outre, si l'on veut enfermer les deux sommets d et f sans remettre en cause l'hypothèse sur leurs degrés, les arêtes (x^{i+1}, α) et (x^i, α) doivent appartenir elles aussi au graphe G. Maintenant $dg(\alpha) = 4$; voir figure 46.

   On montre que le sommet α, ainsi défini, doit appartenir à l'ensemble X_{sup6}.

   Par l'absurde. Pour le moment $dg_{G'}(\alpha) = 4$, de manière à obtenir $dg_G(\alpha) = 5$,

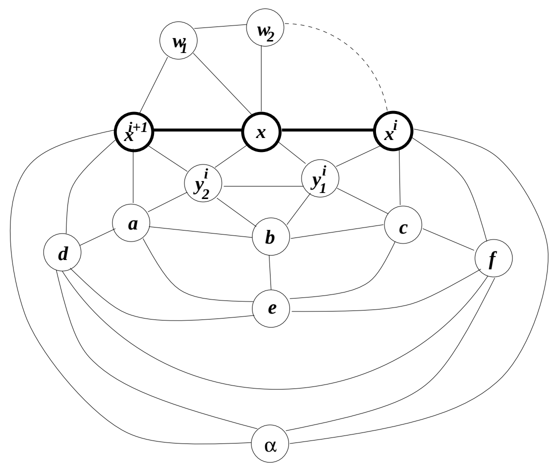

FIG. 46 - *Chemin de longueur deux dans H et* $j_i = 2$. *(2)*

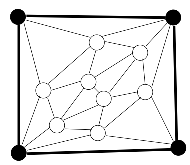

FIG. 47 - M_4.

il existe dans le graphe G un sommet β ainsi que les arêtes (α, β), (x^{i+1}, β) et (x^i, β). Les trois arêtes ajoutées créent le carré $[\alpha, \beta\ ; x^{i+1}, x^i]$. Il y une contradiction car par hypothèse le graphe G est de type B, et donc sans carré [...].

Donc $\alpha \in X_{sup6}$ et on a un cycle élémentaire de longueur 4, formé de quatre sommets de X_{sup6}. Ce motif est désigné par M_4 ; il comporte huit sommets de degré cinq à *l'intérieur* du cycle élémentaire. On a donné un dessin de ce motif sur la figure 47.

(b) Supposons $d \in X_{sup6}$ et $f \in X_{inf6}$ (où $f \in X_{sup6}$ et $d \in X_{inf6}$ est le cas symétrique). On décrit le voisinage du sommet d dans le sens indirect par la liste suivante : $N(d) = (x^{i+1}, a, e, f, d^1, \ldots, d^q)$.

On a donc le carré $[f, d^1\ ; d, x^i]$; voir figure 48. Il y a contradiction puisque par hypothèse G est B.

(c) Supposons $d, f \in X_{sup6}$. On a un cycle élémentaire de longueur 5, formé par des sommets de l'ensemble X_{sup6}. Ce motif est appelé M_5 ; il comporte six sommets de degré cinq à l'intérieur du cycle élémentaire ; voir figure 49.

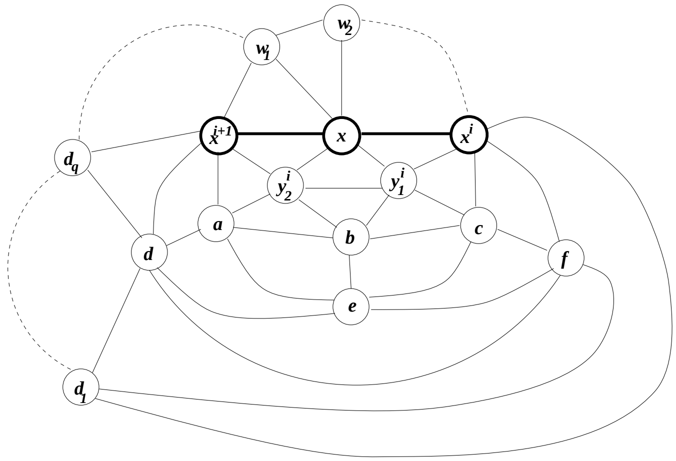

FIG. 48 - *Chemin de longueur deux dans H et $j_i = 2$. (3)*

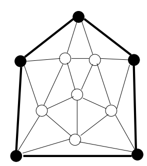

FIG. 49 - M_5.

4. Supposons $j_i = 3$. Sur la figure 50, on a représenté localement autour du sommet x, la structure d'un graphe de type B tel que $j_i = 3$. Construisons cette figure. On note G' le sous-graphe de G, dessiné figure 50.

   Puisqu'il n'y a pas de carrés [...], les sommets $y_1^i, y_2^i, y_3^i, a, b, c, d, e$ sont dans X_{inf6}. Il y a plusieurs cas suivant $dg(f)$.

   (a) Supposons $f \in X_{inf6}$. Dans le graphe G' le sommet f est de degré cinq. Donc

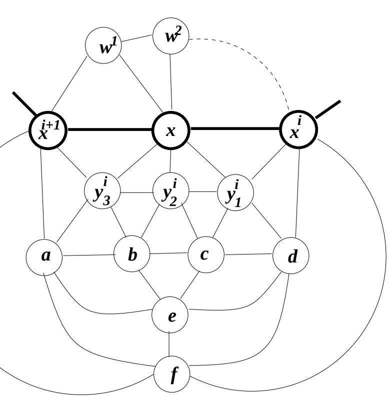

FIG. 50 - *Chemin de longueur deux dans H et $j_i = 3$.*

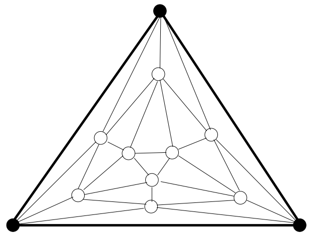

FIG. 51 - M_3.

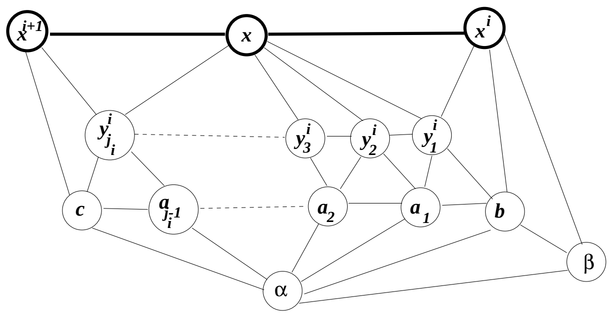

FIG. 52 - *Chemin de longueur deux dans H et $j_i > 3$.*

dans le graphe d'origine G, il existe une arête (x^i, x^{i+1}) qui enferme f. On a alors un cycle élémentaire de longueur trois, formé de sommets de l'ensemble X_{sup6}. On note M_3 ce motif, il comporte neuf sommets de l'ensemble X_{inf6} à l'intérieur ; voir figure 51.

Remarque Le graphe de la figure 51 est isomorphe à celui de la figure 23 de la page 44 : c'est le plus petit graphe $MPG5$.

(b) Supposons $f \in X_{sup6}$. On a le motif M_4 déjà défini précédemment.

5. Supposons $j_i > 3$. Sur la figure 52 on a dessiné localement autour du sommet x la structure d'un graphe B tel que $j_i > 3$. On commente la construction de cette figure ; suivant notre notation, pour tout $j \in [1, j_i]$, $y^i_j \in X_{inf6}$.

   Par hypothèse il n'y a pas de carrés [...]. On contruit le voisinage de x entre x^i, x^{i+1} dans le sens indirect de manière progressive.

   Pour éviter les carrés $[y^i_q, y^i_{q+1} \; ; x, \ldots]$ avec $q \in [1, j_i - 1]$ il doit exister des sommets notés a_q de X_{inf6}, tels que pour chaque valeur de q le sommet a_q est le voisin commun des sommets y^i_q et y^i_{q+1} dans $N^2(x)$. Voir figure 52.

   a_q étant de X_{inf6}, il existe alors un unique sommet α tel que (a_q, α) soit une arête de G.

Enfin, pour conserver dans l'ensemble X_{inf6} les sommets $y_1^i, y_{j_i}^i$ et a_1, a_{j_i-1} (ce qui permet d'éviter l'apparition des carrés $[\ldots\ ; x^i, a_1]$ et $[\ldots\ ; x^{i+1}, a_{j_i-1}]$), on les enferme par deux nouveaux sommets b, c. On doit alors rajouter les arêtes suivantes,

$$(x^i, b), (y_1^i, b), (a_1, b), (\alpha, b) \text{ et } (x^{i+1}, c), (y_{j_i}^i, c), (a_{j_i-1}, c), (\alpha, c).$$

Cet ajout implique $dg(\alpha) \geq 5$.

Pour éviter l'apparition des carrés $[y_1^i, x^i\ ; x, b]$ et $[x^{i+1}, y_{j_i}^i\ ; x, c]$, on doit enfermer les deux sommets b et c. Cela implique l'existence d'un sommet β tel que les arêtes (β, b), (β, x^i), (β, α) soient des arêtes du graphe G.

L'ajout de ces trois arêtes implique $dg_G(\alpha) \geq 6$. En conséquence ces trois arêtes créent le carré $[\beta, b\ ; x^i, \alpha]$.

Il y a contradiction, car par hypothèse le graphe est B ; donc ne possède aucun carré $[\ldots]$.

En conclusions dans un graphe G de type B, il n'existe pas de sommet x dans X_{sup6} tel que $\exists i \in [1, dg_H(x)]$ avec $j_i > 3$.

$\square$

La démonstration du lemme 11 a fait intervenir quatre motifs notés M_5, M_4, M_3 et M_3^{vide}. Récapitulons leurs définitions :

Définition 12 *Un motif M_3^{vide} est une face triangulaire composée de trois sommets appartenant à l'ensemble X_{sup6}. En parcourant les sommets de la face externe d'un motif M_3^{vide}, les degrés sont 2, 2, 2.*

Définition 13 *Un motif M_3 est un motif composé d'une face externe de longueur trois, et d'une face interne entièrement triangulée comportant exactement neuf sommets de degré cinq. En parcourant les trois sommets de la face externe les degrés sont 5, 5, 5 ; voir figure* 51.

Définition 14 *Un motif M_4 est un motif composé d'une face externe de longueur quatre, et d'une face interne entièrement triangulée et comportant exactement huit sommets de degré cinq. En parcourant, avec une orientation du plan, les quatre sommets de la face externe, les degrés sont 4, 5, 4, 5 ; voir figure* 47.

Définition 15 *Un motif M_5 est un motif composé d'une face externe de longueur cinq, et d'une face interne entièrement triangulée comportant exactement six sommets de degré*

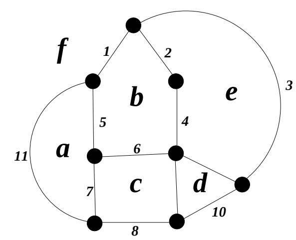

FIG. 53 - *Exemple de graphe H.*

cinq. En parcourant les cinq sommets de la face externe les degrés sont 4, 4, 4, 4, 4 ; voir figure 49.

Définition 16 *Deux motifs sont dits contigus si et seulement si ils ont au moins une arête e de leurs faces extérieures en commun. Dans ce cas on dit que l'arête e distingue deux motifs.*

Dans la suite, quand on parlera de coin, on sous-entendra coin d'une face de H.

Exemples On donne sur la figure 53 un exemple de plusieurs motifs contigus et non contigus. Le motif a est contigu aux motifs b, c et f. L'arête 5 distingue le motif a du motif b. En revanche le motif a n'est pas contigu à e et à d. Les motifs c et e (resp. b et d) ne possèdent qu'un sommet en commun, ils ne sont donc pas contigus.

Dans la figure 44, x^3, x, x^2, x^2, x, x^1 forment des coins ; en revanche, pour $k > 3$, x^k, x, x^2 ne forment pas de coin.

Théorème 17 *Soit G un graphe $MPG5$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le graphe G est de type B.*

(ii) 1. $X_{sup6} \neq \emptyset$

2. $\forall x \in X_{sup6}$, *et* $\forall i \in [1, k]$ *on a d'une part* $k = dg_H(x) \geq 2$ *et d'autre part* x^i, x, x^{i+1} *forme un coin des motifs suivants :*

   (a) M_3 *ou* M_4 *ou* M_5 *ou*

   (b) M_3^{vide} *avec chacun des trois côtés bordés par un des trois motifs précédents.*

Preuve

$(i) \Rightarrow (ii)$ Clairement si le graphe G est de type B alors $X_{sup6} \neq \emptyset$. D'autre part depuis le début de ce chapitre on a montré que si le graphe G est de type B alors la condition (ii) est vraie.

$(i) \Leftarrow (ii)$ On doit montrer que sous les hypothèses, le graphe G est tel que :

1. $X_{sup6} \neq \emptyset$.
2. Il n'existe pas de carrés [...].
3. G est non A.

Par hypothèse, $X_{sup6} \neq \emptyset$. Soit x un sommet de X_{sup6}, et x^i, x^{i+1} deux voisins consécutifs de x dans H.

Le coin x, x^i, x^{i+1} vérifie la clause (ii).2. Ce qui interdit l'existence des carrés $[x, \ldots ; \ldots]$ ainsi que celle des carrés $[\ldots ; x, \ldots]$. En conséquence il n'existe pas de carrés du type [...] comportant le sommet x dans le graphe G. Cela étant vérifié pour tous les sommets de l'ensemble X_{sup6}, il vient qu'il n'existe pas de carrés [...] dans le graphe G.

Enfin puisque par hypothèse, pour tous les sommets x de l'ensemble X_{sup6},

$$dg_H(x) \geq 2,$$

le graphe G ne peut pas être de type A. Par définition un graphe $MPG5$ avec $X_{sup6} \neq \emptyset$, sans carré [...] et non de type A, est de type B ; donc le graphe G est de type B.

$\square$

Remarque Soit G un graphe B. Le graphe G est un assemblage de sous-graphes M_3, M_4, M_5 et M_3^{vide} respectant le théorème 17. On considère le sous-graphe H induit par les sommets de X_{sup6}. Si le graphe H est connexe alors H est un pavage du plan par les cycles élémentaires de longueur trois, quatre et cinq (cf. la figure 54).

A cet effet, le théorème suivant montre que le sous-graphe H d'un graphe B induit par les sommets appartenant à l'ensemble X_{sup6} est connexe.

2.2 Le sous-graphe H induit par X_{sup6} dans un graphe B est connexe

Théorème 18 *H est connexe.*

Preuve *Par l'absurde.* Supposons que H soit constitué de $f > 1$ composantes connexes, notées H_1, H_2, ... H_f.

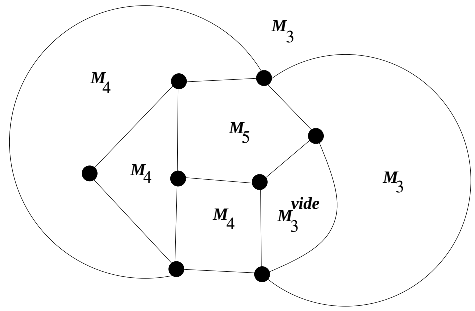

FIG. 54 - *Exemple de graphe H. (2).*

Puisque le graphe G est de type B, par le théorème précédent $\forall x \in X_{sup6}$, d'une part $k = dg_H(x) \geq 2$ et d'autre part $\forall i \in [1, k]$, x^i, x, x^{i+1} forme un coin des motifs suivants :

1. M_3 ou M_4 ou M_5 ou

2. M_3^{vide} avec chacun des trois côtés bordés par un des trois motifs précédents.

Donc une quelconque face extérieure d'une composante H_j avec $j \in [1, f]$ ne peut être que de longueur trois, quatre, ou cinq.

D'autre part, puisque le graphe est sans carré [...], pour chaque composante connexe H_j, cela signifie que dans G il existe des *ceintures* de sommets appartenant à l'ensemble X_{inf6} enveloppant et séparant chacune des composantes de manière à les séparer dans H. Chaque ceinture d'une composante doit avoir la propriété qu'elle n'engendre pas de carrés avec les autres composantes qui lui sont voisines dans H.

Soit H_j une composante connexe du sous-graphe H, tel que $j \in [1, f]$. On peut alors procéder de manière énumérative sur la composante H_j, en étudiant les trois possibilités de longueur de sa face externe ; *i.e.* soit de longueur 3, 4 ou 5.

Supposons que la composante H_j possède une face extérieure de longueur trois. De manière à ne pas engendrer de carré [...], la composante H_j doit être entourée dans G de neuf sommets de degré cinq ; voir figure 55. Le sous-graphe induit par ces neuf sommets est isomorphe au sous-graphe induit par les neuf sommets de degré cinq d'un motif M_3.

Cela implique que dans le graphe G, le sous-graphe correspondant à H_j en ajoutant cette ceinture de neuf sommets de degré cinq est une composante connexe du graphe G. En d'autres termes, que le graphe G n'est pas connexe. Il y a contradiction car par hypothèse le graphe G est connexe.

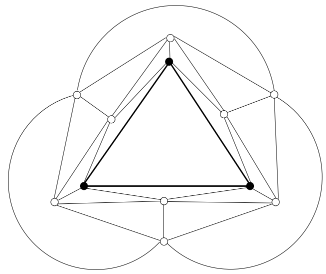

FIG. 55 - *Composante de H avec une face externe de longueur trois.*

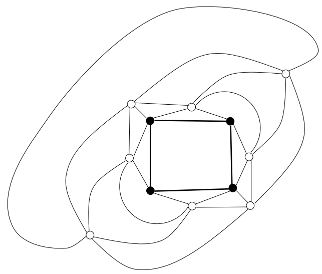

FIG. 56 - *Composante de H avec une face externe de longueur quatre.*

Remarque En ce qui concerne les longueurs 4 et 5 les démonstrations, similaires, sont laissées au lecteur, qui pourra s'aider des figures 56 et 57.

Donc il ne peut pas y avoir plusieurs composantes dans H ; en conséquence le graphe H est connexe. $\square$

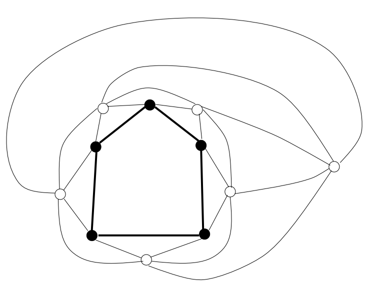

FIG. 57 - *Composante de H avec une face externe de longueur cinq.*

Chapitre 3

Une première méthode pour construire tous les graphes $MPG5$ d'ordre n fixé

Dans ce chapitre, on propose un premier procédé de fabrication de tous les graphes $MPG5$ d'ordre n fixé. Ce procédé utilise uniquement les transformations T et T^{-1}.

On va construire itérativement et par ordre croissant, de l'ordre quatorze jusqu'à l'ordre désiré, tous les graphes $MPG5$ par l'application des transformations T et T^{-1}.

L'ensemble des graphes $MPG5$ a été partitionné en trois sous-ensembles disjoints notés A, B, et C. On devra donc montrer qu'à partir du graphe $MPG5$ d'ordre quatorze il est toujours possible de fabriquer tous les graphes de chacun de ces trois sous-ensembles.

On va proposer la démonstration réciproque ; on va montrer qu'à partir d'un graphe de chacun de ces sous-ensembles, par un nombre fini d'application des transformations T ou T^{-1}, on peut toujours réduire l'ordre du graphe courant ; voir figure 58.

Dans un premier temps, on traite le cas des graphes B.

3.1 Construire les graphes B par T et T^{-1}

Dans cette section on montre que pour tout graphe B d'ordre n on peut faire correspondre un graphe C d'ordre n en utilisant T et T^{-1}. Dans cette perspective on présente la propriété suivante,

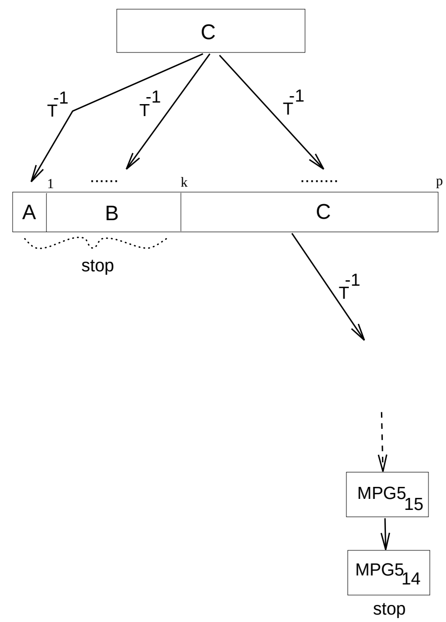

FIG. 58 - *Réduction d'un graphe $MPG5$ dans le graphe $MPG5_{14}$.*

Corollaire 19 *Soit G un graphe de type B. Il existe un sommet $x \in X_{sup6}$ et un indice $i \in [1, dg_H(x)]$ tel que*

$$j_i = \{2, 3\}.$$

Preuve Dans un premier temps on démontre le résultat intermédiaire suivant : soit G un graphe de type B et x un sommet dans X_{sup6} tel que $\forall i \in [1, dg_H(x)]$, $j_i = 0$, alors $dg_H(x) = 2$.

- Par le théorème 17, d'une part $dg_H(x) \geq 2$ et d'autre part $\forall i \in [1, dg_H(x)]$ les arêtes (x, x^i), (x, x^{i+1}) et (x^i, x^{i+1}) distinguent le motif M_3^{vide} d'un motif M_3, M_4 ou M_5. En conséquence $dg_H(x) = 2$.

Maintenant on propose de démontrer le corallaire *par l'absurde.* Soit G un graphe de type B tel que $\forall x \in X_{sup6}$, et $\forall i \in [1, dg_H(x)]$ $j_i = 0$. Par le résultat précédent, cela implique que $\forall x \in X_{sup6}$, $dg_H(x) = 2$. Par le théorème 18, le graphe H est connexe. En conséquence le graphe H est un triangle, tel que les deux faces de ce triangle soient vides dans le graphe G. En d'autres termes le graphe G est un triangle, il y a une contradiction puisqu'un tel graphe n'est pas un graphe B. □

Soit G un graphe de type B d'ordre n. Le corollaire 19 implique qu'il existe un sommet $x \in X_{sup6}$ tel que $j_i = \{2, 3\}$. On considère alors un tel sommet x et un tel indice i.

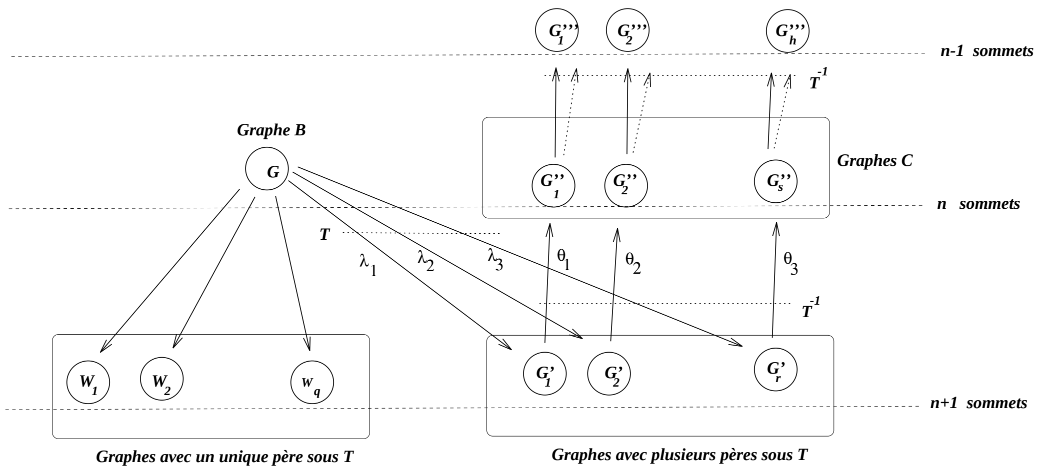

FIG. 59 - *Générer les graphes B par T et T^{-1}.*

Il y a deux cas suivant que $j_i = 2$ ou $j_i = 3$.

- Supposons $j_i = 2$. On considère le premier voisinage de x décrit par la liste suivante :

$$N(x) = \left(x^i, y_1^i, y_2^i, x^{i+1}, w^1, w^2, \ldots\right)$$

avec $x^i, x^{i+1} \in X_{sup6}$, $y_1^i, y_2^i \in X_{inf6}$ et les sommets w^1, w^2 indifféremment dans X_{sup6} ou dans X_{inf6}, voir figure 60 (à gauche). On note λ le chemin $[x\,; w^1, y_1^i]$.

Le graphe $G' = T(\lambda)$, contient plusieurs carrés [...] différents ; voir figure 60 (à droite). En particulier, on note θ le carré $[y_2^i, x\,; y_1^i, x^{i+1}]$. On considère le graphe $G'' = T^{-1}(\theta)$. Ce graphe contient le carré $[x', y_1^i\,; v, x^i]$, voir figure 61 (à droite).

Puisque le graphe G'' contient un carré [...] il n'est ni A, ni B ; en conséquence le graphe G'' est un graphe d'ordre n de type C.

- Supposons $j_i = 3$. On décrit le premier voisinage de x par la liste suivante :

$$N(x) = (x^i, y_1^i, y_2^i, y_3^i, x^{i+1}, w^1, w^2 \ldots)$$

avec $x^i, x^{i+1} \in X_{sup6}$, $y_1^i, y_2^i, y_3^i \in X_{inf6}$ et les sommets w^1, w^2 indifféremment dans X_{sup6} ou X_{inf6}, voir figure 62 (à gauche). On note λ le chemin $[x\,; w^1, y_2^i]$.

Comme précédemment, le graphe $T(\lambda)$, contient plusieurs carrés [...] différents ; voir figure 62 (à droite). En particulier on note θ le carré $[y_1^i, x'\,; y_2^i, x^i]$. On considère le graphe $G'' = T^{-1}(\theta)$. Ce graphe contient le carré $[x, w^1\,; v, x^{i+1}]$, voir figure 63 (à droite).

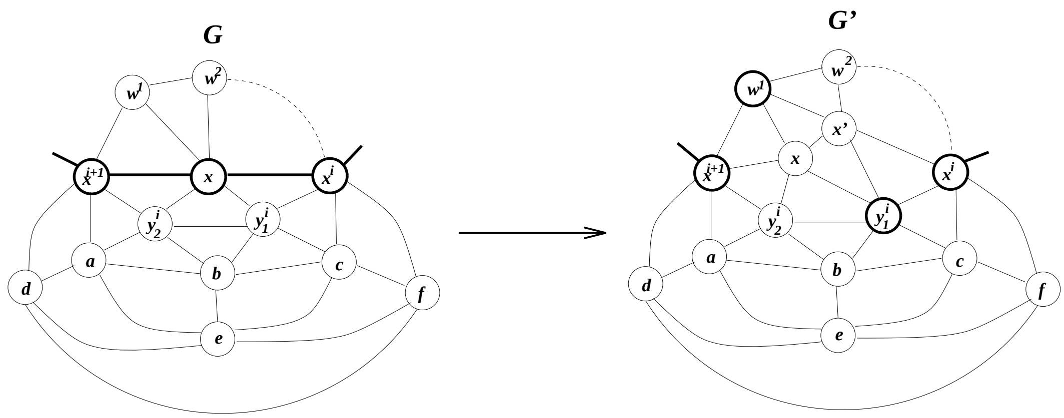

FIG. 60 - $T(\lambda)$ *avec* $\lambda = [x\ ; w^1, y_1^i]$.

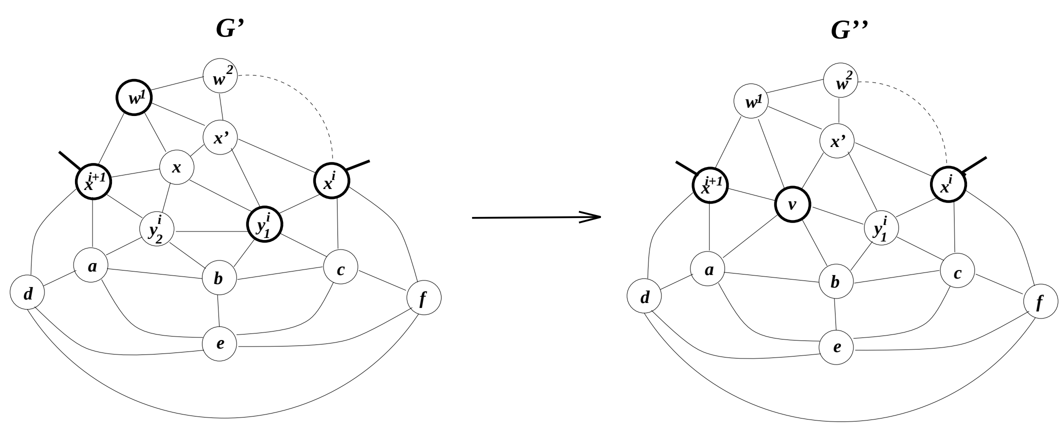

FIG. 61 - $T^{-1}(\theta)$ *avec* $\theta = [y_2^i, x\ ; y_1^i, x^{i+1}]$.

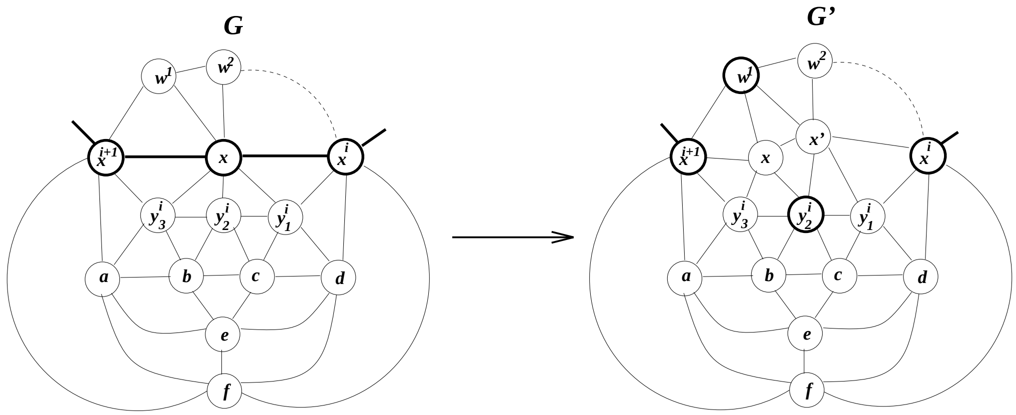

FIG. 62 - $T(\lambda)$ *et* $\lambda = [x\ ; w^1, y_2^i]$.

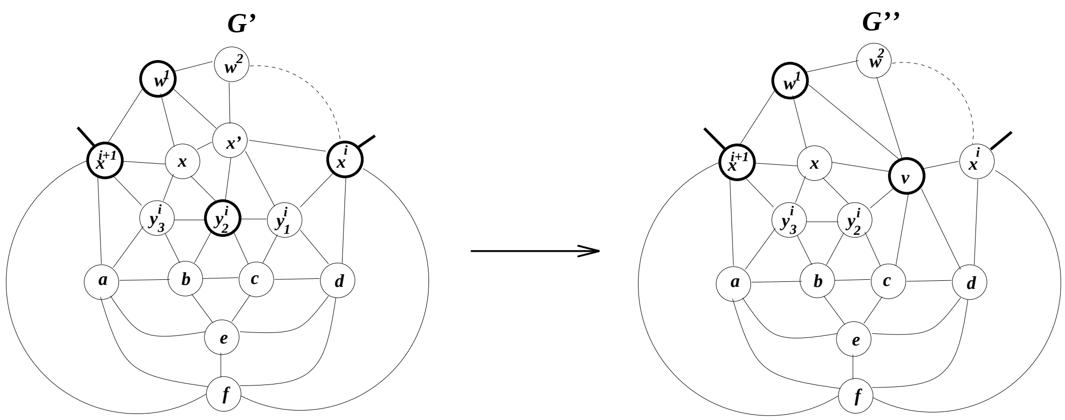

FIG. 63 - $T^{-1}(\theta)$ *avec* $\theta = [y_1^i, x'\ ; y_2^i, x^i]$.

Puisque le graphe G'' contient un carré [...] il n'est ni A, ni B ; en conséquence le graphe G'' est d'ordre n de type C.

Lemme 20 *Soit G un graphe B, il existe au moins un chemin λ.*

Preuve Soit G un graphe B, le corollaire 19 indique qu'il existe un sommet x dans X_{sup6}, et un indice i dans $[1, dg_H(x)]$ tel que $j_i = \{2, 3\}$. Donc pour tout graphe de type B, il existe au moins un chemin $\lambda = [x\ ; \ldots]$. □

Un carré θ est défini dans un graphe $T(\lambda)$, le résultat suivant est trivial.

Lemme 21 *Soit G un graphe B, et un chemin λ. Il existe un carré θ dans le graphe $T(\lambda)$.*

Des deux derniers lemmes, on tire le théorème suivant,

Théorème 22 *Soit G un graphe de type B d'ordre n et un chemin λ. On note $G' = T(\lambda)$ et $G'' = T^{-1}(\theta)$. Le graphe G'' est un graphe de type C d'ordre n.*

3.2 Générer les graphes $MPG5$ par les transformations T, T^{-1}

Cette section développe un théorème ainsi qu'un corollaire utilisant les transformations T et T^{-1}. Le théorème démontre que tout graphe $MPG5$ d'ordre $n \geq 14$, peut être réduit dans l'unique graphe $MPG5$ d'ordre 14. Le corollaire propose la réciproque ; c'est-à-dire qu'il implique que tout graphe $MPG5$ d'ordre $n \geq 14$, peut être fabriqué à partir de celui d'ordre 14.

Théorème 23 *Soit G un graphe $MPG5$ avec l'ensemble X_{sup6} non vide. Par un nombre fini d'applications successives de T et T^{-1}, on peut réduire G dans le plus petit type A.*

Preuve Clairement la contraction T^{-1} est inappliquable lorsque le graphe courant ne contient pas de carré [...]. L'ensemble des graphes $MPG5$ ne contenant pas de carrés [...] a été partitionné en deux familles notées A et B. On étudie les trois éventualités :

- Supposons que le graphe courant soit un graphe A d'ordre n. Dans ce cas on applique l'explosion T sur un chemin $[v\ ; a, b]$ quelconque. Le graphe résultant d'ordre $n+1$ est par définition un graphe A^T. Il suffit dès lors d'appliquer la contraction T^{-1} sur l'un des deux carrés π^2 ou π^3 (cf. section 1.2 de la page 63). Le graphe résultant est d'une part d'ordre n et d'autre part il est de type C, pour $n > 14$. Dans le cas où $n = 14$, le graphe courant est l'unique graphe $MPG5$ d'ordre 14.

- Supposons que le graphe courant soit un graphe B d'ordre n. On sélectionne un chemin λ, et on applique $T(\lambda)$ (cf. section 3.1 de la page 83). Dans le graphe résultant d'ordre $n+1$, on applique $T^{-1}(\theta)$. Par le théorème 22, ce dernier graphe est d'une part d'ordre n et d'autre part il est de type C.

- Supposons que le graphe courant G d'ordre n soit de type C. Dans ce cas il existe au moins un carré $s = [\ldots]$; on applique simplement $T^{-1}(s)$. Le graphe obtenu est un graphe $MPG5$ d'ordre $n-1$.

En appliquant ce procédé sur le graphe G, clairement celui-ci sera réduit en un nombre fini d'itérations dans celui d'ordre 14. On peut voir une illustration de ce procédé sur la figure 58. □

Par le théorème précédent, on tire la réciproque :

Corollaire 24 *Soit G un graphe $MPG5$ d'ordre $n \geq 14$. A partir du plus petit type A (l'unique $MPG5$ d'ordre14) et en appliquant un nombre fini de fois les tranformations T et T^{-1} on peut construire le graphe G.*

3.3 Conclusion

On a prouvé par le corollaire 24, que l'on peut fabriquer tout graphe $MPG5$ d'ordre supérieur à douze ; et cela en appliquant un nombre fini de fois les transformations T et T^{-1}.

Cette méthode de fabrication contient un défaut. En effet pour fabriquer tous les graphes $MPG5$ d'ordre n, il faut avoir fabriqué tous ceux sans carré [...] (*i.e.* les graphes B et le graphe A (si n est pair)). Or pour construire les graphes B d'ordre n, il faut construire des graphes C d'ordre $n+1$. En d'autres termes, si on désire fabriquer tous les graphes $MPG5$ d'ordre n, il faut construire des graphes de type C d'ordre $n+1$.

Dans le prochain chapitre, on présentera un autre algorithme (ne contenant pas ce défaut), plus sophistiqué, pour construire tous les graphes $MPG5$ d'ordre n à partir de ceux d'ordre inférieur ou égal à n.

Chapitre 4

Etude des graphes B non accessibles par la transformation T'

4.1 Objectif du chapitre

On rappelle que l'on souhaite fabriquer tous les graphes $MPG5$ d'ordre $n \geq 14$ en partant du graphe $MPG5$ d'ordre 14. Cette méthode sera basée sur la réciproque, c'est-à-dire que l'on montrera que tout graphe $MPG5$ d'ordre $n \geq 14$ est réductible à l'unique graphe $MPG5$ d'ordre 14.

Dans cette perspective, on présente succinctement une méthode réduisant tout graphe $MPG5$ (*i.e.* A, B ou C) d'ordre n dans un graphe $MPG5$ d'ordre $n-1$ (sans *'passer'* par un graphe d'ordre supérieur à n).

- Tout graphe C d'ordre n est par définition réductible par la contraction T^{-1} à un graphe $MPG5$ d'ordre $n-1$.
- Les graphes A sont construits indépendamment des autres graphes $MPG5$ par l'algorithme 38.
- Les graphes B contenant au moins un carré $\langle \ldots \rangle$ sont réductibles par la bascule-contraction $(T')^{-1}$.

Après cette rapide étude de cas, il apparaît que le problème de réduction des $MPG5$ ne se pose que pour les graphes B ne comportant aucun carré $\langle \ldots \rangle$.

Ces graphes B non constructibles par T', ne sont autres que ceux auxquels la transformation $(T')^{-1}$ ne peut s'appliquer.

La seconde section de ce chapitre étudiera et définira les graphes B accessibles par l'explosion-bascule T'. La troisième section proposera de nouveaux outils construisant tous les graphes B sans carré $\langle \ldots \rangle$.

4.2 Graphes B réductibles par la transformation $(T')^{-1}$

La bascule-contraction $(T')^{-1}$ est inapplicable, si et seulement si le graphe B ne possède pas d'arêtes dont les extrémités ont un degré supérieur à six. On introduit une notation pour ces arêtes :

Définition 25 *Soit G un graphe B. On note $e = \langle z, t \rangle$ une arête de E si et seulement si les sommets z et t sont de degré supérieur à six.*

Proposition 26 *Soit G un graphe B. Il existe un carré $\langle z, t\ ; x, y \rangle$ si et seulement si il existe une arête $\langle z, t \rangle$.*

Rechercher les graphes B sans carrés $\langle z, t\ ; x, y \rangle$ revient donc à rechercher ceux sans arêtes $\langle z, t \rangle$. Pour un carré $\langle z, t\ ; x, y \rangle$, on écrira parfois $(T')^{-1}(z, t)$ au lieu de $(T')^{-1}(z, t\ ; x, y)$.

Définition 27 *Soit G est un graphe $MPG5$, il est dit de type B' si et seulement si, il est à la fois B et sans arête $\langle \ldots \rangle$.*

En d'autres termes les graphes B' sont les graphes B où la bascule-contraction $(T')^{-1}$ est inapplicable.

On rappelle que la proposition 3 de la page 55 démontre qu'à partir d'un graphe $MPG5$ et d'un chemin $p = \langle v\ ; z, t \rangle$, le graphe $T'(p)$ est de type B. On définit alors le sous-ensemble C' de C constitué de ceux à partir desquels il est possible de générer des graphes de type B.

Définition 28 *Soit G un graphe C. Le graphe G est de type C' si et seulement si, il existe un chemin $p = \langle v\ ; z, t \rangle$.*

Remarque De la même manière que pour les graphes A, B et C, on écrira parfois d'un graphe qu'il est C' (respectivement B') pour signifier que ce graphe est de type C' (resp. B'). Pareillement, on parlera de l'ensemble des graphes C' (resp. B'), pour signifier l'ensemble des graphes de type C' (resp. B').

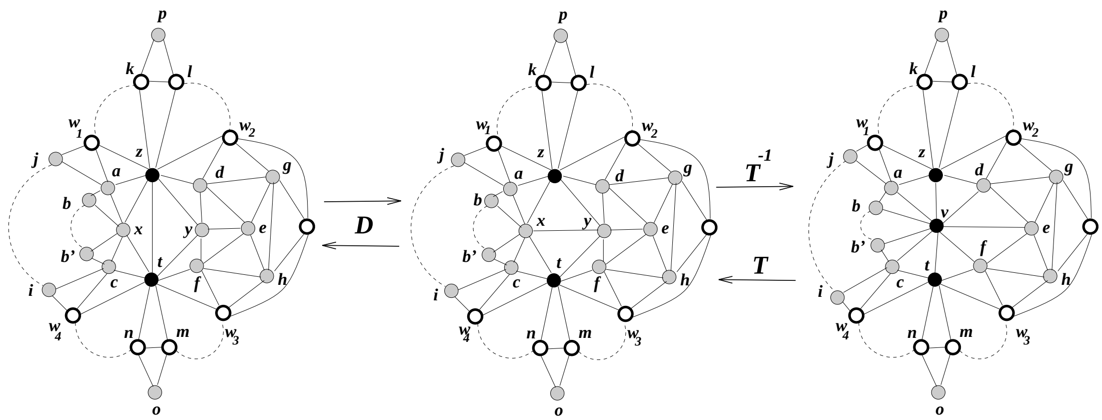

FIG. 64 - *Voisinage de $\langle z,t\rangle$ pour $(T')^{-1}(z,t)$.*

Les deux dernières définitions permettent de préciser l'optique de ce chapitre : chercher à caractériser l'ensemble des graphes C', ainsi que l'ensemble des graphes B'.

Lemme 29 *Soit G un graphe de type B. S'il existe un motif M_3 ou M_3^{vide} contigu à un motif M_4 ou M_5, alors il existe une arête $\langle z,t\rangle$ tel que $(T')^{-1}(z,t)$ est un graphe C'.*

Preuve Soit G un graphe B tel qu'il existe un motif M_3 ou M_3^{vide} contigu à un motif M_4 ou M_5. On utilise la notation de la figure 64 (à gauche) décrivant le voisinage de ces deux motifs contigus par l'arête (z,t) qui les distingue.

Supposons que sur la figure 64 (celle de gauche), le motif correspondant à M_3 ou à M_3^{vide} soit décrit à gauche de l'arête (z,t) et le motif correspondant à M_4 ou à M_5 à sa droite.

1. Supposons que le motif M_3 soit contigu à un motif M_4 ou M_5. Dans ce cas les deux sommets w_1 et w_4 sont dans l'ensemble X_{inf6}.

   (a) On se place dans le cas où M_3 est contigu à M_4. Alors nécessairement, l'un des deux sommets w_2 et w_3, appartient à l'ensemble X_{inf6} et l'autre à l'ensemble X_{sup6}. Supposons $w_2 \in X_{inf6}$ et $w_3 \in X_{sup6}$. Avec v le sommet résultant de la réduction des sommets x, y (voir figure 64, à droite), il vient d'une part que $dg(z) \geq 7$, $dg(t) \geq 7$ et d'autre part que le graphe $(T')^{-1}(z,t)$ contient le carré $[t, f\ ; v, w_3]$, donc est C.

   (b) On se place dans le cas où M_3 est contigu à M_5. On a alors les deux sommets w_2 et w_3 dans l'ensemble X_{sup6}. Comme précédemment il vient d'une part que $dg(z) \geq 7$, $dg(t) \geq 7$ et d'autre part que le graphe $(T')^{-1}(z,t)$ contient deux carrés $[z, d\ ; v, w_2]$ et $[t, f\ ; v, w_3]$; donc est C.

2. Supposons que l'on ait M_3^{vide} contigu à M_4 ou à M_5. Par le théorème 17 de la page 79 on sait que chacun des trois côtés de M_3^{vide} est bordé par un des trois motifs M_3, M_4 ou M_5. Ainsi dans tous les cas les deux sommets w_1 et w_4 seront dans l'ensemble X_{inf6}.

   On peut alors réutiliser les deux observations précédentes 1a et 1b ; à savoir que l'on obtient un carré dans le graphe $(T')^{-1}(z,t)$ si M_3^{vide} est voisin à M_4 et deux carrés sinon.

   En d'autres termes, le graphe $(T')^{-1}(z,t)$ est de type C.

Sur les quatre cas observés, le graphe $(T')^{-1}(z,t)$ a été prouvé de type C. Pour montrer que le graphe $(T')^{-1}(z,t)$ est de type C' il faut prouver l'existence d'un chemin $\langle \ldots \rangle$. On va montrer que dans les quatre cas, le chemin $[v\ ; z,t]$ du graphe $(T')^{-1}(z,t)$est un chemin $\langle v\ ; z,t\rangle$.

1. Supposons que dans le graphe G (figure 64 à gauche), l'arête (z,t) distingue un motif M_3 d'un motif M_4 ou M_5. Dans ce cas le sommet x de G est de degré cinq, donc

$$dg_{(T')^{-1}(z,t)}(v) = 8.$$

   D'autre part, puisque le graphe est de type B les sommets a, b, c, d, e, f appartiennent à l'ensemble X_{inf6}.

   (a) Supposons que dans le graphe G, l'arête (z,t) distingue un motif M_3 d'un motif M_4. Dans ce cas le graphe $(T')^{-1}(z,t)$ contient exactement un carré, défini par $[t, f\ ; v, w_3]$.

   (b) Supposons que dans le graphe G, l'arête (z,t) distingue un motif M_3 d'un motif M_5. Dans ce cas le graphe $(T')^{-1}(z,t)$ contient exactement deux carrés, définis par $[z, d\ ; v, w_2]$ et $[t, f\ ; v, w_3]$.

2. Supposons que dans le graphe G, l'arête (z,t) distingue un motif M_3^{vide} d'un motif M_4 ou M_5. Dans ce cas le sommet x est de degré supérieur à cinq, donc

$$dg_{(T')^{-1}(z,t)}(v) > 8.$$

   D'autre part, puisque le graphe G est de type B dans le graphe $(T')^{-1}(z,t)$ les sommets b', a, d, e, f, c, b' sont dans X_{inf6} ; si l'arête (z,t) distingue un motif M_3^{vide} d'un motif M_4 (resp. M_5), le graphe $(T')^{-1}$ contient exactement un carré $[t, f\ ; v, w_3]$ (resp. deux carrés $[z, d\ ; v, w_2]$ et $[t, f\ ; v, w_3]$).

Enfin dans tous les cas, si l'on suppose[1] $dg_G(z) = 7$ (resp.[2] $dg_G(t) = 7$) ; alors puisque le graphe G est de type B, $p \in X_{inf6}$ (resp. $o \in X_{inf6}$).

Dans tous les cas, *i.e.* les 4 cas, dans le graphe $(T')^{-1}(z,t)$, le chemin $[v\ ; z,t]$ est un chemin $\langle v\ ; z,t\rangle$.

□

Du lemme précédent on tire le résultat :

Théorème 30 *Tout graphe de type B contenant un motif M_3 ou M_3^{vide} contigu à un motif M_4 ou M_5 est accessible par T' à partir d'un graphe C'.*

Après avoir décrit les graphes B accessibles par l'explosion-bascule T', on s'attache à définir les graphes C'.

Corollaire 31 *Soit G un graphe de type C' et $p = \langle v\ ; z,t\rangle$ un chemin. On note $s = \langle z,t\ ; x,y\rangle$, le carré associé à p dans le graphe $G' = T'(p)$. Dans G', l'arête $\langle z,t\rangle$ distingue deux motifs m_1 et m_2 tels que,*

$$m_1, m_2 \in \left\{M_3, M_3^{vide}, M_4, M_5\right\}$$

excepté pour le couple $m_1 = m_2 = M_3$ et le couple $m_1 = M_3$, $m_2 = M_3^{vide}$.

Preuve La démonstration sera en deux parties. D'une part on montre que dans le graphe G' l'arête $\langle z,t\rangle$ ne distingue ni deux motifs M_3 entre eux, ni un motif M_3 d'un motif M_3^{vide} ; et d'autre part que l'arête $\langle z,t\rangle$ peut distinguer tous les autres couples de motifs possibles sur l'ensemble $\{M_3, M_3^{vide}, M_4, M_5\}$.

1. *Par l'absurde.* On considère le graphe $G' = T'(p)$ tel que dans G' l'arête $\langle z,t\rangle$ distingue soit deux motifs M_3, soit un motif M_3 d'un motif M_3^{vide}. En utilisant la notation de figure 64, dans les deux cas il y a les égalités suivantes,

$$dg_{G'}(w_1) = dg_{G'}(w_2) = dg_{G'}(w_3) = dg_{G'}(w_4) = 5.$$

   Cela implique que le graphe $G = (T')^{-1}(s)$ ne contient aucun carré [...]. Il y a contradiction puisque par hypothèse le graphe G est de type C', et donc de type C.

1. Si $dg_G(z) = 7$ alors les sommets k et w_1 (respectivement l et w_2) sont confondus.
2. Si $dg_G(t) = 7$ alors les sommets m et w_3 (respectivement n et w_4) sont confondus.

2. La preuve du lemme 29 implique que l'arête $\langle z, t\rangle$ peut distinguer les couples de motifs contigus suivants : (M_3, M_4), (M_3, M_5), (M_3^{vide}, M_4), et (M_3^{vide}, M_5). On énumère et étudie les cas restants, (M_4, M_4), (M_5, M_5) et (M_4, M_5), en utilisant la notation de la figure 64 (à gauche).

   (a) Supposons que l'arête $s = \langle z, t\rangle$ distingue deux motifs M_4. Cela implique que soit le sommet w_1, soit le sommet w_4 (resp. w_2 et w_3) appartiennent à l'ensemble X_{sup6}. Supposons $w_1, w_2 \in X_{sup6}$. Le graphe $(T')^{-1}(s)$ contient alors exactement deux carrés,

   $$[a, z\ ; w_1, v], [d, z\ ; w_2, v].$$

   On peut alors vérifier que dans le graphe $(T')^{-1}(s)$ le chemin $[v\ ; z, t]$ est un chemin $\langle v\ ; z, t\rangle$. En conséquence ce dernier graphe est de type C'.

   (b) Supposons que l'arête $s = \langle z, t\rangle$ distingue deux motifs M_5. Cela implique que les quatre sommets w_1, w_2, w_3 et w_4 sont dans l'ensemble X_{sup6}. Cela signifie que le graphe $(T')^{-1}(s)$ contient alors exactement quatre carrés définis par,

   $$[a, z\ ; v, w_1], [z, d\ ; v, w_2], [t, f\ ; v, w_3], [t, c\ ; v, w_4]$$

   ainsi que le chemin $\langle v\ ; z, t\rangle$. Donc par définition ce graphe est de type C'.

   (c) Supposons que l'arête $s = \langle z, t\rangle$ distingue un motif M_4 d'un motif M_5. Supposons en outre que le motif M_4 soit décrit entre les sommets w_4 et w_1, par les sommets a, b, et c sur la figure 64 (à gauche). Cela implique d'une part que les sommets w_2, w_3 sont dans X_{sup6} et d'autre part que l'un ou l'autre des sommets w_1, w_4 soit dans X_{sup6}.

   Supposons $w_1 \in X_{sup6}$, le graphe $(T')^{-1}(s)$ contient alors exactement les trois carrés suivants,

   $$[z, d\ ; w_2, v], [t, f\ ; w_3, v], [a, z\ ; w_1, v]$$

   ainsi que le chemin $\langle v\ ; z, t\rangle$; ce graphe est donc par définition de type C'.

□

Voici la formulation "inverse" du corollaire précédent.

Corollaire 32 *Soit G un graphe de type B. S'il existe une arête $\langle z, t\rangle$ ne distinguant ni deux motifs M_3 entre eux, ni un motif M_3 d'un motif M_3^{vide}, alors G peut être construit par l'explosion-bascule T' à partir d'un graphe C'.*

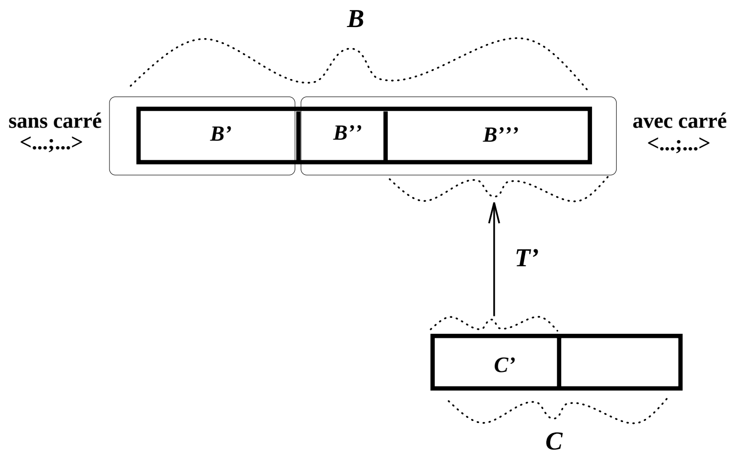

FIG. 65 - *Relation entre B', B'', B''' et C'.*

Remarque On rappelle que l'on cherche à réduire tout graphe B d'ordre n à un graphe $MPG5$ d'ordre $n-1$. Ce graphe $MPG5$ d'ordre $n-1$ sera soit A, soit B, soit C. Le corollaire précédent décrit exactement les graphes B d'ordre n qui peuvent être construits à partir d'un graphe C d'ordre $n-1$.

On va maintenant s'attacher à définir plus précisément les deux sous-ensembles de graphes B, induits par ce même corollaire :

1. Les graphes B', graphes B tels qu'il n'existe pas d'arêtes $\langle \ldots \rangle$; c'est-à-dire non réductibles par la bascule-contraction $(T')^{-1}$.

2. Les graphes B'', graphes B tels que pour tout carré $s = \langle z, t\ ; x, y \rangle$, l'arête $\langle z, t \rangle$ distingue soit deux motifs M_3, soit un motif M_3 d'un motif M_3^{vide} ; c'est-à-dire non réductibles par la transformation $(T')^{-1}$ en graphes C ; mais réductibles en graphes B.

3. Les graphes B''', graphes ni B', ni B''. En d'autres termes les graphes B''' sont les graphes B accessibles par T' à partir de graphes C.

Voir figure 65. Nous donnons maintenant quelques propriétés des graphes B', B'' et B'''.

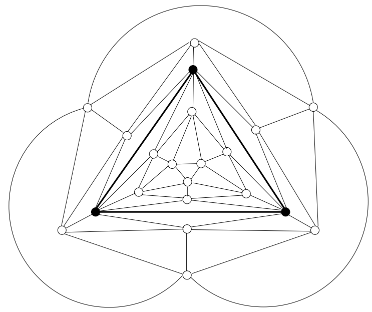

FIG. 66 - *Le graphe B d'ordre 21.*

4.3 Graphes B non réductibles en graphes C par la transformation $(T')^{-1}$

Les graphes B non accessibles par l'explosion-bascule T' à partir d'un graphe C ont été appelés les graphes B''. Ces graphes de type B sont tels que, par le corollaire 32, pour tout carré $s = \langle z, t\ ; x, y\rangle$, l'arête $\langle z, t\rangle$ distingue soit deux motifs M_3, soit un motif M_3 d'un motif M_3^{vide}.

Dès lors on va chercher à identifier les graphes B ne contenant que des motifs M_3 et M_3^{vide}.

On distingue deux cas: les graphes B'' sans motifs M_3, et les graphes B'' avec motifs M_3.

4.3.1 Graphes B composés de motifs M_3^{vide}

Il n'existe pas de graphes B possédant exclusivement des motifs M_3^{vide}. En effet, pour chaque M_3^{vide} le théorème 30 indique que ces trois arêtes doivent le distinguer d'un motif M_3, M_4 ou M_5.

4.3.2 Graphes B composés de motifs M_3 ou (M_3 et M_3^{vide})

On rappelle qu'il existe un unique graphe B composé de motifs M_3 tel que $|X_{sup6}| = 3$: il est d'ordre 21, voir la figure 66.

Ainsi dans cette partie, on va chercher à définir les graphes B composés de motifs M_3 avec ou sans motifs M_3^{vide} tels que $|X_{sup6}| > 3$.

Dans cette sous-section 4.3.2 on distingue deux familles de graphes: la première, Z_1, est constituée des graphes comportant deux motifs M_3 contigus; la seconde, Z_2, complémentaire de Z_1, est constituée des graphes ne comportant pas deux motifs M_3 contigus.

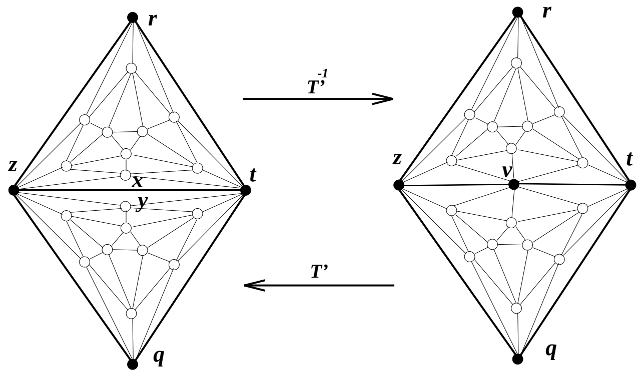

FIG. 67 - *Deux motifs M_3 contigus et $(T')^{-1}$ sur l'arête les distinguant.*

Dans la famille Z_1, puisqu'il existe deux motifs M_3 contigus, il existe également une arête $\langle z, t\rangle$ dont les deux voisins communs x, y appartiennent à l'ensemble X_{inf6} (le graphe courant est en effet de type B, *i.e.* sans carré [...]). Donc pour tous les graphes Z_1 l'application $(T')^{-1}$ pourra produire un sommet v de degré huit, dans la mesure où l'on appliquera $(T')^{-1}$ sur une arête séparant deux motifs M_3. En revanche pour tout graphe Z_2, la transformation $(T')^{-1}$ fournira nécessairement un sommet v de degré supérieur à huit.

Graphes Z_1

Soit G un graphe de la famille Z_1, et $e = \langle z, t\rangle$ une arête distinguant deux motifs M_3. Avec la notation de la figure 67, le graphe $G' = (T')^{-1}(e)$ remplace les deux motifs M_3 par deux motifs M_4, tel que $dg_{G'}(v) = 8$.

Les graphes ainsi obtenus à partir de Z_1 par application de $(T')^{-1}$ seront notés Z_1'. En d'autres termes les graphes Z_1' sont les graphes $(T')^{-1}(e)$ tels que e est une arête distinguant les deux motifs M_3 dans un graphe Z_1.

On donne maintenant une propriété caractéristique plus descriptive des graphes Z_1'.

Propriété caractéristique 33 *Un graphe est Z_1' si et seulement si il est de type B et contient exactement deux motifs M_4 possédant trois sommets communs dans H, le reste du graphe étant composé de motifs M_3 et M_3^{vide}. Ces trois sommets communs forment un chemin noté ρ de type $\langle \ldots \rangle$; ce chemin est unique puisqu'il n'existe que deux motifs M_4.*

Exemple Sur la figure 67, le chemin ρ est défini par $\langle v\ ; z, t\rangle$, avec $dg_{Z_1'}(v) = 8$ et aucun carré [...].

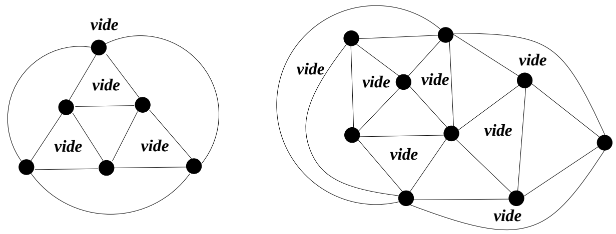

FIG. 68 - *Exemple de graphes dans Z_2.*

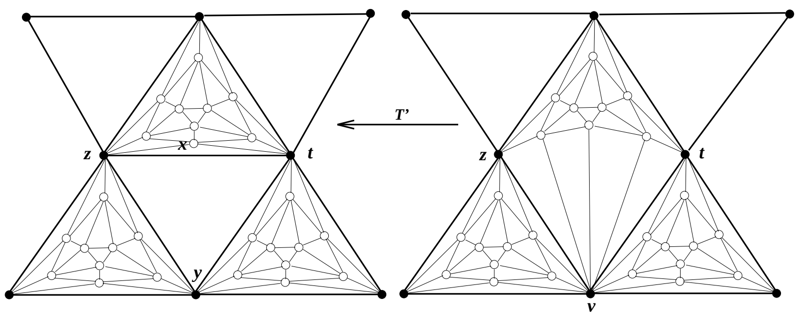

FIG. 69 - *M_3, M_3^{vide} contigus et $(T')^{-1}$ sur l'arête les distinguant.*

Par le corollaire 32, le graphe $G' = (T')^{-1}(e)$ est accessible par T' à partir d'un graphe de type C'. En conséquence tout graphe Z_1 d'ordre n est constructible par $T'(\rho)$ à partir d'un graphe Z_1' d'ordre $n-1$, lui-même étant constructible par T' à partir d'un graphe C' d'ordre $n-2$.

En conséquence, tout graphe Z_1 d'ordre n possède un graphe *grand-père* de type C' d'ordre $n-2$ sous T'.

Graphes Z_2

Soit G un graphe de la famille Z_2 (on peut en voir deux exemples sur la figure 68 : l'un où H est d-régulier[3] et l'autre non). On considère un motif M_3 contigu à un motif M_3^{vide}. Observons qu'aucune arête $e = \langle z, t \rangle$, n'a ses deux "voisins" communs simultanément ni dans X_{inf6} ni dans X_{sup6}.

On peut vérifier que la bascule-contraction $(T')^{-1}$ appliquée à une arête distinguant un motif M_3 d'un motif M_3^{vide} remplace les deux motifs par un seul motif M_4 ; voir figure 69.

Soit $e = \langle z, t \rangle$ une arête, on note G' le graphe $(T')^{-1}(e)$. Sur l'ensemble des graphes Z_2, on note Z_2' l'ensemble des graphes correspondant aux graphes G'.

3. Un graphe d-régulier est un graphe dont tous les sommets ont exactement d voisins.

On donne une propriété caractéristique (plus descriptive) des graphes Z'_2.

Propriété caractéristique 34 *Un graphe est Z'_2 si et seulement si il est de type B et contient un seul motif M_4 bordé consécutivement par deux motifs M_3 suivi par deux motifs M_3^{vide}. Le reste étant exclusivement des motifs M_3 et M_3^{vide}, tels qu'il n'existe pas deux motifs M_3 contigus. Dans un graphe de la famille Z'_2, les deux arêtes consécutives du motif M_4 bordées par des motifs M_3 forment un chemin de type $\langle \ldots \rangle$. Ce chemin est noté ϱ ; il est unique.*

Exemple Sur la figure 69, le chemin ϱ est défini par $\langle v\ ; z, t\rangle$, avec $dg_{Z'_2}(v) > 8$ et aucun carré [...].

Par le corollaire 32, le graphe G' est accessible par T' à partir d'un graphe de type C'. En conséquence un graphe Z_2 d'ordre n est constructible par $T'(\varrho)$ à partir d'un graphe Z'_2 d'ordre $n-1$. Un graphe Z'_2 est quand à lui constructible par un graphe de type C' d'ordre $n-2$, par T'. En conclusion tout graphe Z_2 d'ordre n possède un graphe *grand-père* de type C' d'ordre $n-2$ sous T'.

4.4 Graphes B non réductibles par la transformation $(T')^{-1}$

Les graphes B non accessibles par l'explosion-bascule T' ont été appelés les graphes B'. Ces graphes de type B sont tels qu'il n'existe pas d'arêtes $\langle \ldots \rangle$. En d'autres termes, les graphes B', sont les graphes B non réductibles par $(T')^{-1}$.

Cette section va présenter un ensemble de propriétés des graphes B', ainsi que des outils pour les construire.

Par le théorème 30, tous les graphes B contenant une arête distinguant un motif M_3 ou M_3^{vide} d'un motif M_4 ou M_5 sont accessibles par la transformation T' à partir d'un graphe C'. D'autre part dans la section précédente on a montré que les graphes B composé de motifs M_3 et (ou) M_3^{vide} étaient accessibles par T'.

Ainsi dans la suite on va étudier les graphes B sans arête $\langle \ldots \rangle$ ne contenant que des motifs M_4, (resp. M_5, M_4 et M_5).

On va décrire l'ensemble de ces trois possibilités.

4.4.1 Graphes B composés de motifs M_4

Les graphes B de cette sous-section composés d'un seul motif M_4 n'existent pas. Puisque le degré des sommets extérieurs d'un motif M_4 est 4, 5, 4, 5 ; il existe clairement deux graphes B composés de deux motifs M_4 tels que $|X_{sup6}| = 4$ (cf. les figures

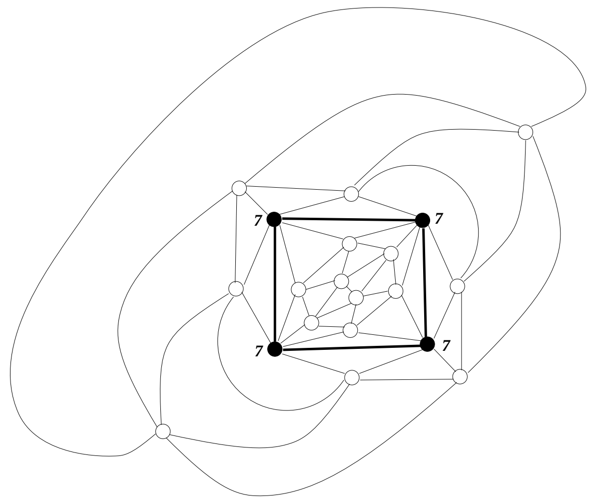

FIG. 70 - *Le graphe B d'ordre 20 avec $\Delta = 7$.*

70, 71). Dès lors on va chercher à définir les graphes B composés de motifs M_4 tels que $|X_{sup6}| > 4$.

On partitionne cet ensemble de graphes en deux familles de graphes notés F_1 et F_2. On définit d'une part les graphes F_1 comme étant ceux composés de motifs M_4 ne contenant pas d'arête $\langle \ldots \rangle$. Les graphes ne vérifiant pas cette condition constituent l'ensemble des graphes complémentaires notés F_2. Par le corollaire 32 de la page 96, puisque dans les graphes F_2 il existe une arête distinguant deux motifs M_4, ces graphes d'ordre n sont accessibles à partir d'un graphe C' d'ordre $n-1$ par l'explosion-bascule T'.

En conséquence, dans cette sous-section, on ne s'attachera à étudier que la famille F_1. Dans un premier temps on présente un résultat quasi-immédiat les concernant.

Lemme 35 *Soit G un graphe F_1, il n'existe pas d'arête (x, y) telle que $dg_H(x) \geq 3$ et $dg_H(y) \geq 3$.*

Preuve *Par l'absurde.* Supposons qu'il existe une telle arête (x, y). Puisque le graphe G n'est composé que de motifs M_4, $dg_G(x) \geq 9$ et idem pour le sommet y. Cela implique l'existence de l'arête $\langle x, y \rangle$. Il y a contradiction car par hypothèse le graphe G est F_1 et donc sans arête $\langle \ldots \rangle$. □

Construire un graphe F_1 composé de trois motifs M_4

On considère le sous-graphe H induit par les sommets de l'ensemble X_{sup6} dans un graphe B composé de deux motifs M_4. Le graphe H est alors un carré, dont les sommets sont notés a, b, c, et d avec une orientation du plan. On cherche à construire le graphe B

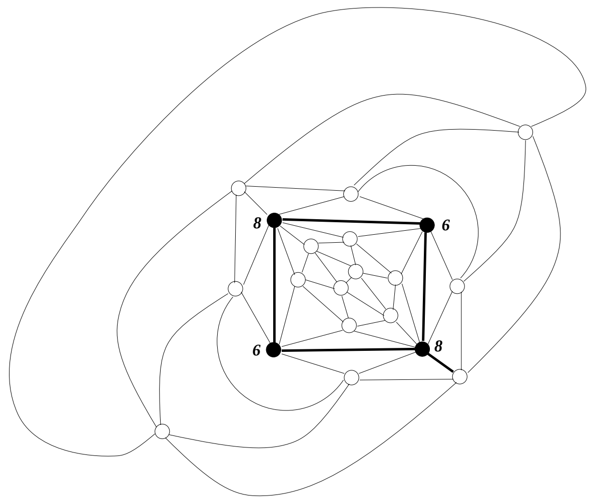

FIG. 71 - *Le graphe B d'ordre 20 avec $\Delta = 8$.*

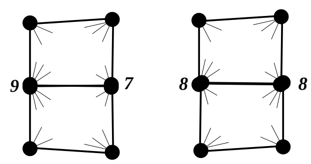

FIG. 72 - *Deux M_4 contigus par une arête.*

comportant trois motifs M_4 ; clairement on aura $|X_{sup6}| = 5$. Cela implique par le lemme précédent, qu'il existe un sommet e dans le graphe H voisin, soit des sommets a et c, soit des sommet b et d. Supposons que le sommet e soit voisin des sommets a et c ; voir figure 73.

On distingue alors deux cas suivant le degré des quatre sommets a, b, c, d, e dans le graphe G. En effet, par définition, puisque les degrés sur les quatre sommets externes à un motif M_4 sont 5, 4, 5, 4, il existe deux configurations possibles par couple de motifs M_4 contigus.

1. Supposons que les trois motifs M_4 ont tous leur degré cinq localisé sur les sommets

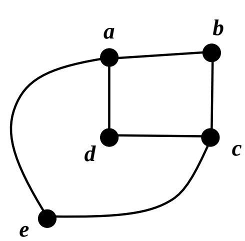

FIG. 73 - *H d'un graphe F_1 avec trois M_4.*

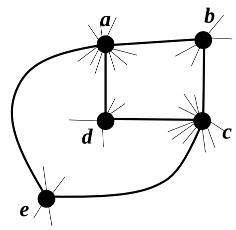

FIG. 74 - *Description du graphe F_1 avec trois M_4.*

a et c. Ce qui implique $dg_G(b) = dg_G(d) = dg_G(e) = 6$; voir figure 74. Dans ce cas clairement la bascule-contraction $(T')^{-1}$ est inapplicable, car il n'existe aucune arête $\langle \ldots \rangle$.

2. Supposons que parmi les trois motifs M_4 il y en ait au moins un, noté m_i, tel que

$$dg_{m_i}(a) = dg_{m_i}(c) = 4.$$

Ce motif m_i introduit une arête $\langle \ldots \rangle$.

En effet supposons par exemple que sur la figure 74 le motif m_i soit défini par les sommets a, b, c, d ; cela implique que $dg_{m_i}(b) = dg_{m_i}(d) = 5$, $dg_G(b) = dg_G(d) = 7$ et $dg_G(a) = dg_G(c) \geq 9$. En conséquence il existe les arêtes $\langle a, d \rangle$, $\langle a, b \rangle$, ... Il y a contradiction, car par hypothèse le graphe G est F_1 et donc sans arête $\langle \ldots \rangle$.

Construire un graphe F_1 composé de plus de trois motifs M_4

On désire énumérer la famille F_1 en partant du plus petit graphe F_1. On propose un procédé simple. Ce procédé doit inclure quelques précautions, comme par exemple de prendre garde que chaque nouveau motif m_i (de type M_4) ajouté devra être *connecté* exactement sur les sommets a et c, et tel que

$$dg_{m_i}(a) = dg_{m_i}(c) = 5.$$

Pour fabriquer le graphe F_1 d'ordre n on propose alors l'algorithme 75, qui est activé par le plus petit graphe F_1, voir figure 71.

Exemple Sur la figure 76, le sous-graphe H du graphe F_1 est composé de cinq motifs M_4.

Proposition 36 *Soit G et G' deux graphes de la famille F_1 de même ordre. Les deux graphes G et G' sont isomorphes.*

Entrée : G le plus petit graphe F_1 et un entier $n \geq 20$.
Sortie : Le graphe F_1 d'ordre n.
Nom : `Construire` $F_1(G, n)$

Début
Si `ordre`$(G) = n$ **Alors Retourner**(G)
Si `ordre`$(G) > n$ **Alors Retourner**$(\emptyset)$
On considère H. La face extérieure de ce graphe est définie par la liste
    a, b, c, d tel que $dg(a) = dg(c) = \Delta(G)$
Ajouter un cycle élémentaire de longueur quatre
    dans la face extérieure de H
    en ajoutant un nouveau sommet e connecté en a et c
$G \leftarrow$ trianguler chaque face de H en insérant huit sommets
        de X_{inf6} tel que $dg_{M_5}(a) = dg_{M_5}(c) = 5$
`Construire` $F_1(G, n)$
Fin

ALG. 75 - *Construire un graphe F_1.*

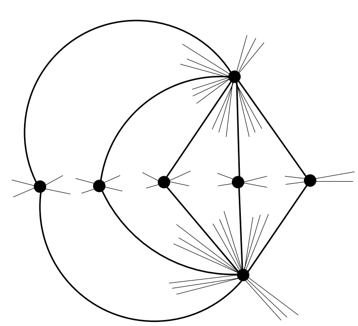

FIG. 76 - *H d'un graphe F_1 avec cinq M_4.*

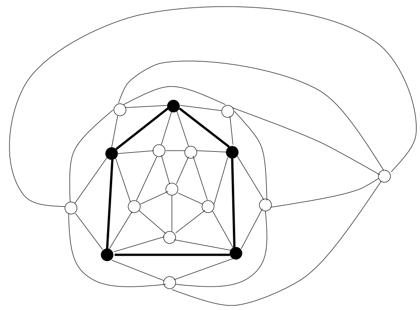

FIG. 77 - *Le graphe B d'ordre 17.*

Preuve Un graphe F_1 est entièrement défini par le nombre k de motifs M_4 et pour chaque entier k, il existe un unique graphe F_1. □

Remarques

- Les graphes F_2 sont accessibles par l'explosion-bascule (T') à partir de graphes de type C'.
- Les graphes non F_1 de cette sous-section sont F_2. Les graphes F_1 peuvent être construits par l'algorithme 75.
- Par construction les graphes F_1 sont d'ordre $n = 20 + (q \times 9)$ avec $q \in [0, \infty[$.

4.4.2 Graphes B composés de motifs M_5

Il existe un unique graphe B constitué de motifs M_5 avec $|X_{sup6}| = 5$; voir la figure 77. Ce graphe contient deux motifs M_5.

Dans cette sous-section on va rechercher les graphes B composés de motifs M_5 tels que $|X_{sup6}| > 5$; *i.e.* comportant plus de deux motifs M_5.

Parmi les graphes B constitués exclusivement de motifs M_5, on distingue deux sous-ensembles notés P_1 et P_2. Le premier sous-ensemble correspond aux graphes tels qu'il n'existe pas d'arête $\langle \ldots \rangle$.

L'ensemble des graphes P_2 (complémentaires de l'ensemble des graphes P_1) contient tous les graphes B composés de motifs M_5 contenant au moins une arête $\langle \ldots \rangle$.

Par le corollaire 32, les graphes P_2 sont accessibles par la transformation T' à partir d'un graphe C'. (Car il contient au moins deux motifs M_5 contigus.)

L'optique de ce chapitre, on le rappelle, consiste, entre autre, à étudier les caractéristiques des graphes B non accessibles par T'. Ainsi jusqu'à la fin de cette sous-section on considèrera exclusivement les graphes P_1.

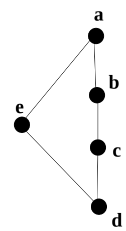

FIG. 78 - *H du graphe B d'ordre 17.*

Lemme 37 *Soit G un graphe P_1, il n'existe pas d'arête (x, y) dans G telle que $dg_H(x) \geq 3$ et $dg_H(y) \geq 3$.*

Preuve *Par l'absurde.* Supposons qu'il existe une telle arête (x, y). Puisque le graphe G n'est composé que de motifs M_5, $dg_G(x) \geq 9$ et idem pour le sommet y. Cela implique l'existence de l'arête $\langle x, y\rangle$. Il y a contradiction car par hypothèse le graphe G est P_1 et donc sans arête $\langle \ldots \rangle$. □

On va chercher à construire le graphe P_1 d'ordre juste supérieur à celui d'ordre 17. Ensuite et plus largement on cherchera un algorithme itératif pour pouvoir tous les construire.

Construire un graphe P_1 composé de trois motifs M_5

Soit G un graphe P_1 avec trois motifs M_5 ; cela implique $|X_{sup6}| > 5$. On fixe un des trois motifs, on note a, b, c, d, e les sommets bordant sa face extérieure (cf. la figure 78).

A partir du motif fixé, on étudie les possibles *collages* des deux autres motifs.

Il existe deux configurations (aux configurations symétriques près) pour l'assemblage d'un second motif. En effet il est soit celui défini par (a, b, c, d, f) dans la figure 79 soit celui défini par (a, e, d, g, h) dans la figure 80.

1. Supposons que le motif ajouté soit décrit par (a, e, d, g, h) ; c'est-à-dire que l'on a inséré un motif M_5 connecté en a et d en ajoutant deux sommets g et h de manière à enfermer le sommet e. Le graphe résultant possède momentanément une face extérieure de longueur six ; voir figure 80.

   Pour que le graphe H possède finalement une face extérieure qui soit de longueur cinq tout en respectant le lemme 37, il existe nécessairement un autre motif M_5 connecté en a et d, ajoutant un sommet f et enfermant les sommets b et c (cf. la figure 81).

2. C'est le cas symétrique au précédent. Supposons que le motif ajouté soit (a, b, c, d, f) sur la figure 79 ; c'est-à-dire que l'on ait rajouté un sommet f connecté en a et d

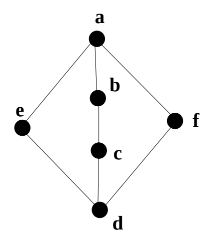

FIG. 79 - *Construction d'un graphe* P_1.

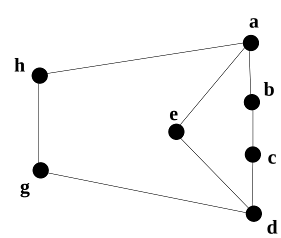

FIG. 80 - *Construction d'un graphe* P_1. *(2)*

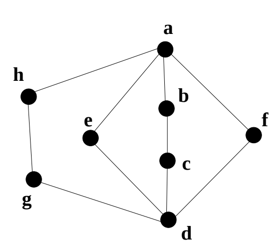

FIG. 81 - *Graphe* P_1 *avec quatre* M_5.

Entrée : G le plus petit graphe P_1 et un entier $n \geq 17$.
Sortie : Le graphe P_1 d'ordre n.
Nom : `Construire` $P_1(G, n)$

Début
Si `ordre`$(G) = n$ **Alors Retourner**(G)
Si `ordre`$(G) > n$ **Alors Retourner**$(\emptyset)$
Dans le sens indirect on note a, b, c, d, e les sommets
    de la face externe de H, tels que $dg_H(a) = dg_H(d) = \Delta(H)$
On considère H. Dans la face extérieure insérer :
    Un cycle élémentaire de longueur cinq en ajoutant deux sommets g, h,
        connecté à a et d, enfermant le sommet e
    Un cycle élémentaire de longueur cinq en ajoutant un sommet f
        connecté à a et d, enfermant les sommets b et c
$G \leftarrow$ Insèrer les six sommets de X_{inf6} dans chacune des faces
`Construire` $P_1(G, n)$
Fin

ALG. 82 - *Construire un graphe P_1.*

de manière à enfermer les sommets b et c. Le graphe résultant possède une face extérieure de longueur quatre ; voir figure 79.

Pour que H possède une face extérieure de longueur cinq tout en respectant le lemme 37, il existe nécessairement un autre motif M_5 défini par (a, e, d, g, h) ; *i.e.* un motif M_5 connecté en a et d, enfermant le sommet e (cf. figure 81).

On peut alors procéder *itérativement*; *i.e.* insérer un motif M_5 connecté en a et d par ajout de deux sommets g' et h' en enfermant le sommet e, puis insérer un autre motif M_5 toujours connecté en a et d par ajout d'un sommet f' enfermant les sommets b et c. Ce processus peut à nouveau être appliqué, sous les mêmes précautions, pour construire le graphe P_1 d'ordre juste supérieur au dernier généré.

L'algorithme 82 reprend les précédentes observations afin de construire le graphe P_1 d'ordre n, il est initialisé par le plus petit graphe P_1 ; c'est à dire par celui d'ordre 17 dessiné figure 77.

On peut voir quelques itérations de ce procédé sur la figure 83.

Proposition 38 *Soit G et G' deux graphes de la famille P_1 de même ordre. Les deux graphes G et G' sont isomorphes.*

Preuve Un graphe P_1 est défini entièrement par le nombre k de motifs M_5. En conséquence, pour chaque entier $k > 1$ il existe un unique graphe P_1. □

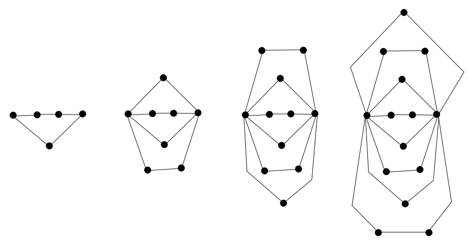

FIG. 83 - *Exemples de graphes H de la famille P_1.*

Remarques

- Les graphes P_2 sont accessibles par l'explosion-bascule T' à partir de graphes C'.
- Les graphes de cette sous-section non P_1 sont P_2. Les graphes P_1 peuvent être construits par l'algorithme 82.
- Par construction les graphes P_1 sont d'ordre $n = 17 + (q \times 15)$, $q \in [0, +\infty[$.

4.4.3 Graphes B composés de motifs M_4 et M_5

Dans cette sous-section (la dernière) on considèrera uniquement les graphes G de type B composés exclusivement de motifs M_4 et M_5 tels qu'il existe au moins un M_4 et au moins un M_5.

Puisque le graphe H est connexe (prop. 18), il existe un motif M_4 contigu à un motif M_5.

Parmi les graphes qui nous intéressent on distingue deux sous-ensembles complémentaires: le premier noté R_1 correspond aux graphes tels qu'il n'existe pas d'arête $\langle \ldots \rangle$, le second noté R_2 contient les graphes composés de motifs M_4 et M_5 possédant au moins une arête $\langle \ldots \rangle$.

Par le corollaire 32 les graphes R_2 sont accessibles par la transformation T' à partir des graphes C' ; puisqu'il existe une arête $\langle \ldots \rangle$ distinguant un motif M_4 d'un motif M_5.

Dans la mesure où l'on cherche à caractériser les graphes B non constructibles par T', on ne s'intéressera qu'au sous-ensemble R_1. Précisement, on va chercher à construire les graphes R_1 en partant de celui d'ordre minimum.

Lemme 39 *Soit G un graphe R_1, il n'existe pas d'arête (x, y) dans G telle que $dg_H(x) \geq 3$ et $dg_H(y) \geq 3$.*

Preuve *Par l'absurde.* Supposons qu'il existe une telle arête (x, y). Puisque le graphe G n'est composé que de motifs M_5 et M_4, $dg_G(x) \geq 9$ et idem pour le sommet y. Cela

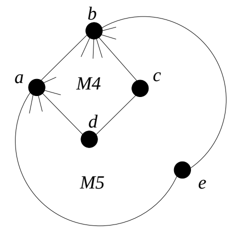

FIG. 84 - *Construction des graphes R_1.*

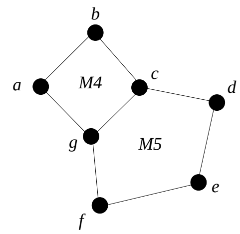

FIG. 85 - *Construction des graphes R_1. (2)*

implique l'existence de l'arête $\langle x, y \rangle$. Il y a contradiction car par hypothèse le graphe G est P_1 et donc sans arête $\langle \ldots \rangle$. $\square$

Construire les graphes R_1

On propose un procédé constructif. Soit un motif M_4 contigu à un motif M_5. Il existe plusieurs types d'assemblage dus aux degrés des sommets situés sur la face extérieure d'un motif M_4. On commence par *fixer* un motif M_4, ensuite on énumère les types d'assemblage d'un motif M_5 sur le précédent motif, de manière à ce que tous deux soient contigus.[4]

On énumère les différents cas suivant leur nombre de sommets.

1. Les deux motifs M_4 et M_5 ont deux (resp. quatre) sommets en commun (cf. la figure 84 (resp. 85)). Clairement il existe une arête du type $\langle \ldots \rangle$; sur la figure 84 l'arête $\langle a, b \rangle$ (resp. dans 85 l'arête $\langle g, c \rangle$); c'est une conséquence du lemme 39.

2. Les deux motifs ont trois sommets en commun (cf. la figure 86). Clairement ce graphe est R_1 si et seulement si,

$$dg_{M_4}(b) = dg_{M_4}(q) = 4.$$

4. Si on commence par placer un motif M_5, puis chercher les possibles collages d'un motif M_4, on aboutira naturellement à la même conclusion.

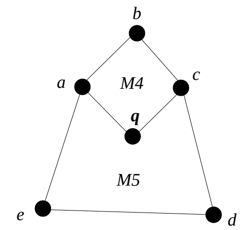

FIG. 86 - *Construction des graphes R_1. (3)*

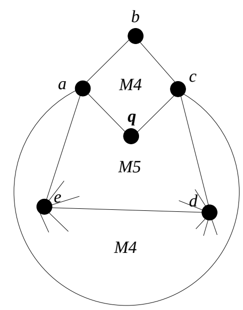

FIG. 87 - *Construction des graphes R_1. (4)*

On distingue les deux cas suivants :

(a) Les trois sommets b, d, e sont tels que $dg_H(b) = dg_H(d) = dg_H(e) = 2$.

(b) Parmi les trois sommets précités b, d et e, au moins un possède trois voisins dans l'ensemble X_{sup6}. Par exemple, supposons que $dg_H(b) \geq 3$ alors aussitôt il apparaît les arêtes $\langle b, a \rangle$ et $\langle b, c \rangle$; c'est une conséquence du lemme 39.

On s'intéresse à l'étude du premier cas ; *i.e.* lorsque les trois sommets b, d et e ont exactement deux voisins dans le graphe H. En imposant cette contrainte, il y a plusieurs cas :

(a) On *enferme* les sommets d, e dans un motif M_4, noté m, connecté aux sommets a et c (cf. figure 87). On peut vérifier qu'il existe une arête du type $\langle \ldots \rangle$; en effet car dès lors soit $dg_m(e) = 5$ soit $dg_m(d) = 5$: supposons $dg_m(d) = 5$ alors il y a l'arête $\langle c, d \rangle$ (cf. la figure 87). Donc les graphes B comportant exclusivement des motifs M_4 et M_5, ainsi que ce sous-graphe, sont des graphes R_2.

(b) On *enferme* les sommets d, e dans un motif M_5 connecté aux sommets a et c ; voir figure 88. Ce graphe appartient visiblement à la famille R_1, dans la mesure où pour les deux motifs M_4 notés m_1 et m_2,

$$dg_{m_1}(a) = dg_{m_2}(a) = dg_{m_1}(c) = dg_{m_2}(c) = 5.$$

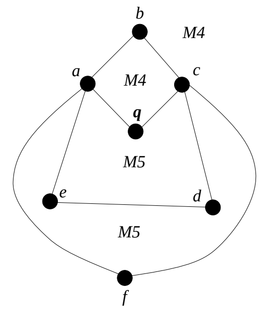

FIG. 88 - *Graphe R_1.*

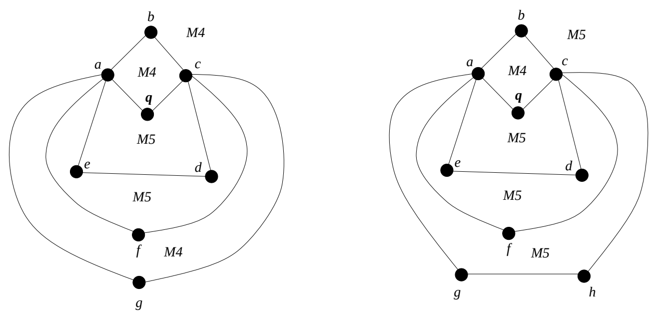

FIG. 89 - *Graphe R_1. (2)*

On peut réitérer ce procédé sur le graphe courant. On obtient deux nouveaux graphes représentés sur la figure 89.

L'algorithme 90 reprend les précédentes observations sur la construction des graphes R_1. On fournit aussi une partie de l'arbre d'énumération de cette famille sur la figure 91.

Remarques

1. Les graphes R_2 sont accessibles par l'explosion-bascule T' à partir de graphes C'.

2. Les graphes de cette sous-section non R_1 sont R_2. Les graphes R_1 peuvent être construits par l'algorithme 90.

3. L'utilisation de l'algorithme 90 n'est pas souhaitable dans la mesure où pour le moment, d'une part on ne connait pas les ordres pour lesquels les graphes R_1 existent, et d'autre part il semble que cet algorithme peut fabriquer plusieurs fois le même graphe R_1. Dans la mesure où l'on désire énumérer les graphes $MPG5$, cette dernière remarque motive la présentation d'une autre solution pour atteindre les graphes R_1.

Entrée : G le plus petit graphe R_1 et un entier $n \geq 24$.
Sortie : Les graphes R_1 d'ordre n.
Nom : `énumération de` $R_1(G, n)$

Début
Si `ordre`$(G) = n$ **Alors Retourner**(G)
Si `ordre`$(G) > n$ **Alors Retourner**$(\emptyset)$
On considère H. On note C_4 (resp. C_5) un cycle élémentaire
  de longueur quatre (resp. de longueur cinq)
Si la face extérieure de H est de longueur quatre **Alors**
  Soit a, b, c, d les quatre sommets extérieurs du sous-graphe H dans le sens indirect,
    tel que $dg_H(a) = dg_H(c) = \Delta(H)$
  $H_1 \leftarrow$ `Ajouter` (H, C_5)
  $H_2 \leftarrow$ `Ajouter` (H, C_4)
  $G_1 \leftarrow$ ajouter les sommets de X_{inf6} dans H_1 tels que $dg_{M_4}(a) = dg_{M_4}(c) = 5$
  $G_2 \leftarrow$ ajouter les sommets de X_{inf6} dans H_2 tels que $dg_{M_4}(a) = dg_{M_4}(c) = 5$
  `énumération de` R_1 (G_1, n) ; `énumération de` R_1 (G_2, n)
Sinon
  Soit a, b, c, d, e les cinq sommets extérieurs du sous-graphe H dans le sens indirect
    tels que $dg_H(a) = dg_H(c) = \Delta(H)$
  $H_1 \leftarrow$ ajouter C_4 dans la face extérieure de H connectée en a et c,
    de manière à enfermer les sommets d et e
  $G_1 \leftarrow$ ajouter les sommets de X_{inf6} dans H_1 tels que $dg_{M_4}(a) = dg_{M_4}(c) = 5$
  `énumération de` R_1 (G_1, n)
Fin

Fonction `Ajouter`(H, C)
Début
Ajouter C dans la face extérieure de H connectée en a et c
Retourner (H)
Fin

ALG. 90 - *Construire les graphes R_1.*

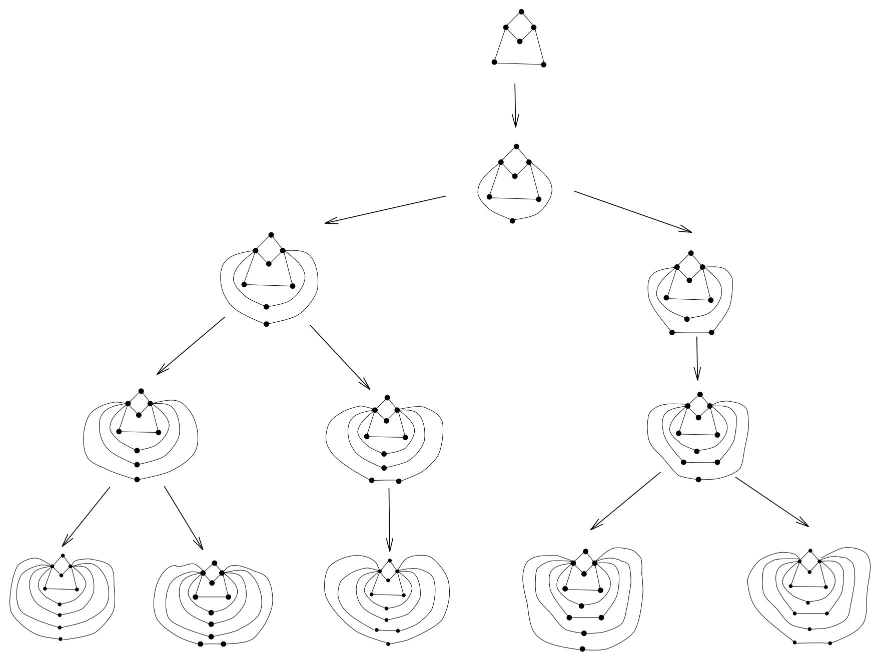

FIG. 91 - *Début de l'arbre d'énumération des graphes H de famille R_1.*

Construire un graphe R_1 d'ordre n à partir d'un graphe B de même ordre

Soit $G = (X, E)$ un graphe R_1 d'ordre n avec q motifs M_5. On note $M = \{m_1, \ldots, m_k\}$ l'ensemble des motifs m_i de type M_4, composant le graphe G. Par construction, G contient deux sommets notés a et c tels que d'une part $dg_H(a) = dg_H(c) = k+q$ et $\forall x \in X - \{a, c\}$, $dg_H(x) = 2$; d'autre part, on a

$$\forall i \in [1, k],\, dg_{m_i}(a) = dg_{m_i}(c) = 5.$$

On note $G^\diamond$ le graphe tel que pour tous les motifs m_i de G on modifie *la disposition* des sommets X_{inf6} intérieurs de manière à obtenir :

$$\forall i \in [1, k],\, dg_{m_i}(a) = dg_{m_i}(c) = 4.$$

On note $R_1^\diamond$ l'ensemble des graphes $G^\diamond$.

Clairement pour tout graphe G d'ordre n de la famille R_1 on peut associer par ce procédé un unique graphe $G^\diamond$ d'ordre n et réciproquement. Autrement dit, il existe une bijection entre les graphes des deux ensembles R_1 et $R_1^\diamond$. On définit alors la bijection ξ qui associe à tout graphe G dans $R_1^\diamond$ un unique graphe G' dans R_1.

Exemple Cf. la figure 92.

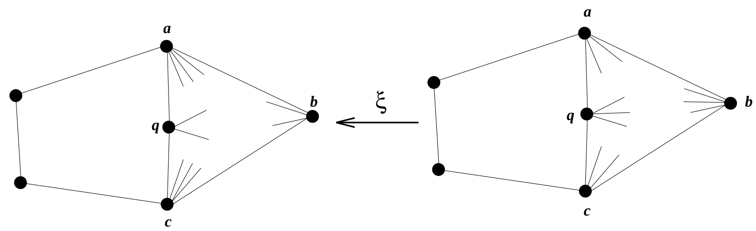

FIG. 92 - *Exemple d'application de ξ.*

Remarque Les graphes $R_1^{\diamond}$ contiennent au moins une arête $\langle \ldots \rangle$ distinguant un motif M_4 d'un motif M_5. Sur la figure 92 (à droite), il y a par exemple l'arête $\langle q, a \rangle$. Par le corollaire 32, les graphes $R_1^{\diamond}$ sont accessibles par la transformation T' appliquée à un graphe de type C ; *i.e.* les graphes $R_1^{\diamond}$ sont des graphes de type B'''.

4.5 Conclusion

Dans cette section on récapitule l'ensemble des résultats de ce chapitre afin de présenter un algorithme construisant les graphes $MPG5$ d'ordre n à partir de ceux d'ordre inférieur ou égal (*i.e.* sans le défaut de la première méthode exposée dans le chapitre 3 de la page 83).

De tous les graphes $MPG5$, ceux de type B sont apparus comme étant les plus délicats à générer.

1. Les graphes B' ont été définis comme les graphes B sans carré $\langle \ldots \rangle$ (donc à la fois non constructibles par T' et non réductibles par bascule-contraction $(T')^{-1}$).

2. Les graphes B'' ont été définis comme étant les graphes B contenant au moins un carré $\langle \ldots \rangle$, non réductibles par bascule-contraction $(T')^{-1}$ à un graphe C (donc non constructibles par explosion-bascule T' à partir d'un graphe de type C). Dans la section 4.3, on a montré que les graphes B'' sont soit Z_1, soit Z_2.

3. Les graphes B restants, notés B''' sont ceux accessibles par la transformation T' à partir d'un graphe C.

Par le corollaire 32, on a $B''' = \{F_2, P_2, R_2, Z_1', Z_2', R_1^{\diamond}, \ldots\}$; d'où la figure 93 et les égalités suivantes :

$$B = B' \cup B'' \cup B''' \tag{6}$$

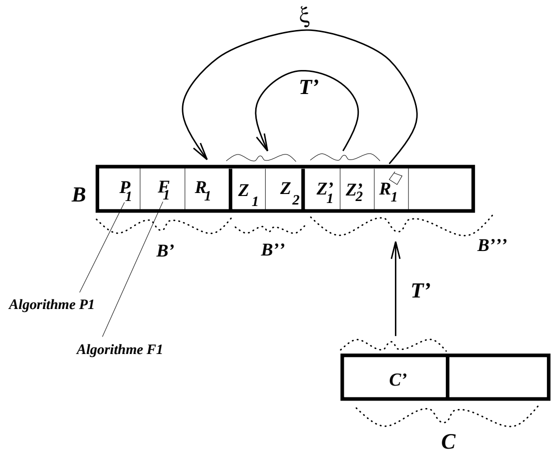

FIG. 93 - *Relation entre B', B'', B''' et C'. (2)*

$$B' = \{F_1, P_1, R_1\} \tag{7}$$

$$B'' = \{Z_1, Z_2\} \tag{8}$$

$$B''' = \{F_2, P_2, R_2, Z_1', Z_2', R_1^{\diamond} \ldots\} \tag{9}$$

Supposons que l'on possède l'ensemble des graphes $MPG5_n$. On présente le procédé de manière informelle pour construire l'ensemble $MPG5_{n+1}$ à partir de $MPG5_n$ (cf. la figure 94). On rappelle que ce problème était le point central de ce chapitre.

1. Clairement à partir de l'ensemble $MPG5_n$, par l'explosion T on peut fabriquer tous les graphes C d'ordre $n+1$. Puisque les graphes C' sont des graphes C, on sait générer tous les graphes C' d'ordre $n+1$.

2. Les graphes A sont construits indépendemment ; *i.e.* pour les ordres pairs on construit l'unique graphe A de cet ordre par l'algorithme 38.

3. Par définition les graphes B''' d'ordre $n+1$ sont accessibles par l'explosion-bascule T' à partir des graphes C' d'ordre n.

4. Les graphes restants, *i.e.* $B' \cup B''$, sont les graphes appelés Z_1, Z_2, P_1, F_1 et R_1.

   (a) Construire les graphes B' d'ordre $n+1$:

      i. Pour chaque ordre il existe au plus un graphe de la famille P_1 (resp. F_1). On propose l'utilisation de l'algorithme 82 (resp. 75) qui construit le graphe P_1 (resp. F_1) d'ordre n.

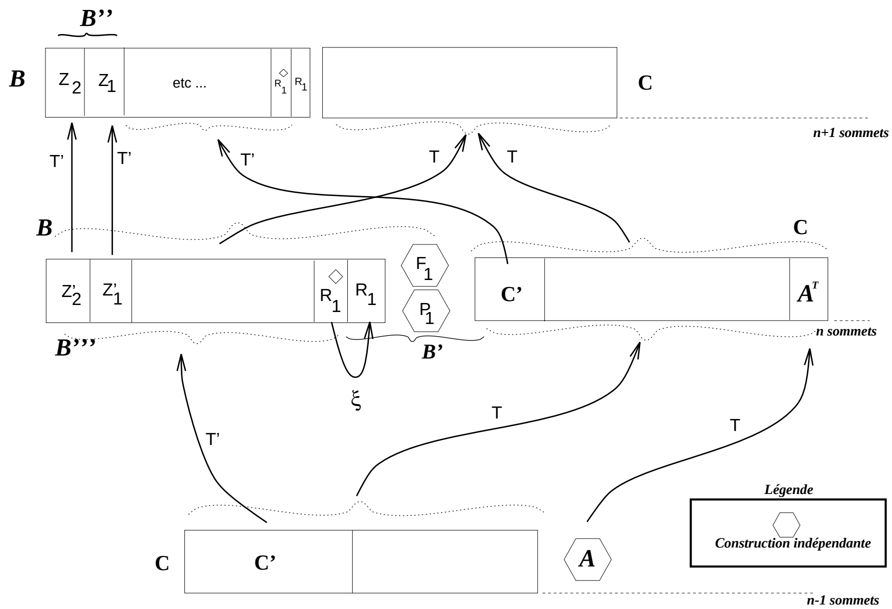

FIG. 94 - *Construire $MPG5_n$ à partir de $MPG5_{n-1}$.*

ii. Pour construire un graphe R_1 d'ordre $n+1$, on applique la bijection ξ sur son graphe image $R_1^{\diamond}$ d'ordre $n+1$. Ce dernier graphe est un graphe B'''. Les graphes B''' d'ordre $n+1$ sont constructibles par la remarque 3.

(b) Construire les graphes B'' d'ordre $n+1$:

Les graphes Z_1 d'ordre $n+1$ sont fabriqués à partir des graphes Z_1' d'ordre n. On rappelle que les graphes Z_1' sont des graphes B'''.

Idem pour les graphes Z_2.

Les indications précédentes sont synthétisées dans l'algorithme 95. Par la suite on note $A(n)$ (resp. $P_1(n)$, $F_1(n)$) l'algorithme 38 (resp. 82, 75) qui fabrique le graphe de type A (resp. P_1, F_1) d'ordre n.

Entrée : Le graphe $MPG5$ d'ordre 14.
Sortie : L'ensemble des graphes $MPG5$ avec répétition.
Nom : `Construire`$MPG5$ (G)

Début
  Si n `MOD` $2{=}0$ **Alors** `Construire`$MPG5$ $(A(n))$
  Si $n = 17 + (q \times 15)$ **Alors** `Construire`$MPG5$ $(P_1(n))$
  Si $n = 20 + (q' \times 9)$ **Alors** `Construire`$MPG5$ $(F_1(n))$
  Liste de cas suivant G
    $G \in C' : \forall p = \langle v\ ; z, t\rangle$, `Construire`$MPG5$ $(T'(p))$
    $G \in R_1^{\diamond}$: `Construire`$MPG5$ $(\xi(G))$
    $G \in Z_1'$: `Construire`$MPG5$ $(T'(\rho))$
    $G \in Z_2'$: `Construire`$MPG5$ $(T'(\varrho))$
  $\forall p = [v\ ; z, t]$, `Construire`$MPG5$ $(T(p))$
Fin

ALG. 95 - *Algorithme de construction de $MPG5$ avec répétition.*

Troisième partie

Enumération des graphes $MPG5$

Chapitre 1

Introduction au procédé d'énumération

1.1 Rappel de quelques notions sur les groupes

Les références des ouvrages utilisés pour l'ensemble des rappels de cette section sont [Aig79], [Whi84], [Bol85] et [LW92].

Définition 40 *Deux graphes simples* $G_1 = (X_1, E_1)$ *et* $G_2 = (X_2, E_2)$ *sont dits isomorphes si et seulement si il existe une bijection* f *entre leurs ensembles de sommets telle que si deux sommets* $x_1, y_1 \in X_1$ *sont les extrémités d'une arête de* G_1*, i.e.* $(x_1, y_1) \in E_1$ *alors les sommets correspondants dans* G_2 *sont les extrémités d'une arête, i.e.* $(f(x_1), f(y_1)) \in E_2$*.*

Définition 41 *Une permutation* α *d'un ensemble de sommets d'un graphe* G *avec la propriété que* (a, b) *est une arête si et seulement si* $(\alpha(a), \alpha(b))$ *est une arête, est appelée un automorphisme de* G*.*

Ainsi, par définition, afin de calculer le groupe des automorphismes des chemins $[\ldots]$ (resp. $\langle\ldots\rangle$) nous devons rechercher les permutations α pour lesquelles $[v\ ; a, b]$ (resp. $\langle v\,; a, b\rangle$) est un chemin du graphe G si et seulement si $[\alpha(v)\,; \alpha(a), \alpha(b)]$ (resp. $\langle\alpha(v)\,; \alpha(a), \alpha(b)\rangle$) est aussi un chemin de G.

Soit $\mathcal{U}$ un groupe de permutations sur l'ensemble $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ et $i, j \in M$. La relation

$$i \approx j \ :\Longleftrightarrow \exists g \in \mathcal{U} \text{ avec } j = g(i)$$

est une relation d'équivalence sur M, où les classes d'équivalence sont appelées les $\mathcal{U}$-orbites.

On donne alors la définition d'une orbite appliquée à la notion de chemin $[\ldots]$ (resp. $\langle\ldots\rangle$).

Définition 42 *Deux chemins $p = [v\ ; a, b]$ et $p' = [v'\ ; a', b']$ (resp. $p = \langle v\ ; a, b\rangle$ et $p' = \langle v'\ ; a', b'\rangle$) sont dans la même orbite si et seulement si il existe un automorphisme α du graphe qui tranforme p en p' ; i.e. $v' = \alpha(v)$, $a' = \alpha(a)$ et $b' = \alpha(b)$.*

1.2 Formes canoniques et calcul d'orbites

Le procédé d'énumération des graphes $MPG5$ est fondé sur le calcul d'orbites ainsi que sur le calcul de formes canoniques. Dans [BMS95], première publication de ce procédé, les auteurs énumèrent l'ensemble des plus petits graphes cubiques de calibre[1] neuf.

L'adaptation de cette méthode au cas des graphes $MPG5$ provient à la fois de [BMS95] ainsi que de la collaboration avec G. Brinkmann.

Soit G un graphe $MPG5$ d'ordre $n+1$, généré par l'algorithme 95.

Supposons que ce graphe ait été fabriqué par la transformation T ou T'. On note Π la transformation T ou T' qui a créé le graphe G.

On présente une *vue d'ensemble* du contrôle de l'énumération appliqué sur la transformation $\Pi = T$.

Le procédé d'énumération que l'on va décrire est en deux parties ; d'une part il y a le calcul des orbites des chemins $[\ldots]$ du graphe G, et d'autre part celui de la canonicité des carrés.

1. (a) On calcule toutes les orbites du groupe des automorphismes des chemins $[\ldots]$. On note l'ensemble de ces orbites comme suit :

$$O = \{O_1, O_2, \ldots, O_r\},$$

où chacune des orbites O_i avec $i \in [1, r]$, contient au moins un chemin $[\ldots]$. Soit une orbite O_i. Supposons que cette orbite contient au moins deux chemins notés $p = [v\ ; a, b]$ et $p' = [v'\ ; a', b']$. Par définition d'une orbite, les deux graphes $T(p)$ et $T(p')$ sont isomorphes.

1. En anglais *girth* correspond au calibre dans [Ber87], c'est-à-dire à la longueur du plus long cycle.

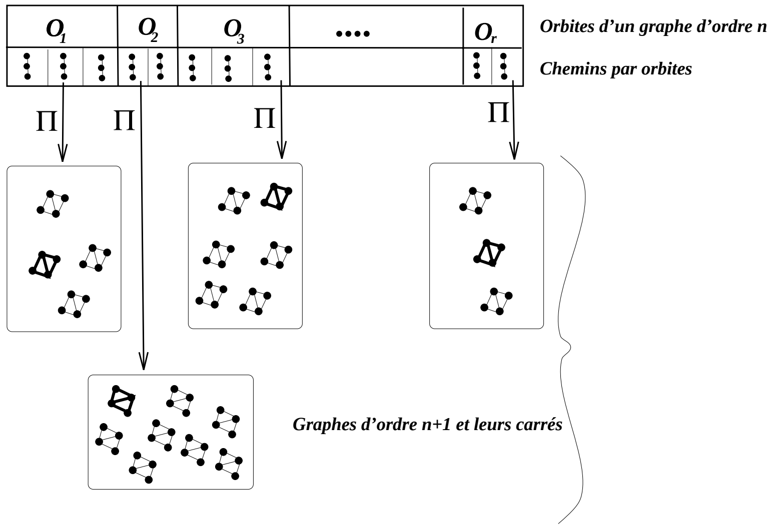

FIG. 96 - *Orbites de chemins.*

(b) Pour chaque orbite O_i, avec $i \in [1, r]$, on sélectionne un unique chemin p_i. On réalise alors $T(p_i)$.

A la suite des deux étapes précédentes on a sélectionné un ensemble noté P de r chemins $[\ldots]$,

$$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}.$$

Pour chaque chemin p_i de P, $T(p_i)$ définit un nouveau graphe, associé à l'orbite O_i. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des graphes $T(p_i)$, c'est-à-dire,

$$\mathcal{G} = \{T(p_1), T(p_2), \ldots, T(p_r)\}.$$

2. Dans chaque graphe $T(p_i)$, on teste la canonicité du carré s_i associée au chemin p_i.

   (a) Si le carré s_i est canonique alors on retourne à l'étape 1 avec le graphe $T(p_i)$.

   (b) Sinon, on applique $T^{-1}(s_i)$ pour *restaurer* le graphe courant G. Puis on retourne à l'étape 2 avec le graphe $T(p_{i+1})$ (si toutefois $i < r$) ; c'est-à-dire que l'on va appliquer l'explosion T sur un chemin de l'orbite O_{i+1} ; voir figure 96.

Remarque La méthode de contrôle des répétitions pour l'explosion-bascule T' est similaire à celle de T. Précisement, il suffit de remplacer la transformation T par T', les chemins $[\ldots]$ par les chemins $\langle\ldots\rangle$ et les carrés $[\ldots]$ par les carrés $\langle\ldots\rangle$.

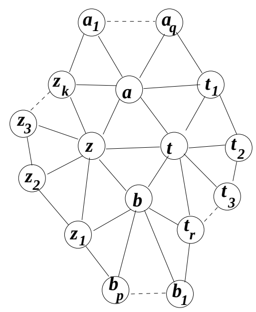

Fig. 97 - *Voisinage d'un carré z, t ; a, b.*

Maintenant le problème est d'une part de détecter les carrés qui sont canoniques, et d'autre part de calculer l'ensemble des orbites.

1.3 Canonicité d'un carré

On considère le graphe $\Pi(p_i)$ (où Π est soit T soit T') ainsi que le carré s_i associé au chemin p_i. Afin de tester la canonicité du carré s_i on calcule un code représentatif pour chaque carré de même type que s_i, c'est-à-dire que, dans le graphe $\Pi(p_i)$, on considére uniquement les carrés pouvant être construits par la transformation Π.

Par exemple dans le cas où Π est T le carré s_i est un carré $[\ldots]$; on devra alors calculer un code représentatif pour chaque carré $[\ldots]$ dans le graphe $T(p_i)$. De même si Π est T', on devra alors calculer un code représentatif pour chaque carré $\langle\ldots\rangle$ dans le graphe $T'(p_i)$.

Par convention le carré s_i sera considéré comme canonique si et seulement si il possède un code maximal sur l'ensemble des carrés de même type.

On présente un procédé de calcul d'un code représentatif pour un carré z, t ; a, b.

1.3.1 Calculer un code représentatif pour un carré

Il existe de nombreuses techniques pour coder les graphes planaires. On peut citer l'un des codes les plus connus, celui de R. Cori dans [Cor75]. Dans ce document, on utilise un code très simple construit à partir d'un arbre issu d'un parcours en largeur. Nous le décrivons dans la notation de la figure 97. Soit $s = z, t$; a, b un carré.

1. Si $dg(z) \neq dg(t)$ et $dg(a) \neq dg(b)$.

   (a) Supposons $dg(z) > dg(t)$ et $dg(a) < dg(b)$. Le code décrira $N(z)$ en partant du sommet t. L'orientation du plan est fixée par la direction du sommet t vers le sommet b dans $N(z)$; *i.e.* la direction est fixée par le chemin z, t, b dans une liste du premier voisinage de z.

On empile le sommet z puis les voisins de z à partir du sommet t suivant l'orientation du plan définie précédemment. On donne le numéro 1 pour le sommet z, 2 pour t, 3 pour b, 4 pour z_1, 5 pour z_2, ... Après avoir décrit $N(z)$, on a besoin d'un séparateur, de manière à distinguer chaque liste de premier voisinage. Ici on propose la solution utilisant un séparateur fixé par le symbole 0.

Après avoir décrit le premier voisinage du sommet z, on décrit le voisinage du sommet de plus petit indice dans la pile dont le premier voisinage n'a pas encore été énuméré. Si tous les sommets ont leur premier voisinage énuméré alors le codage du graphe est terminé.

Dans notre exemple, pour décrire le premier voisinage du sommet t on part de son voisin de plus petit numéro dans la pile. Il s'agit ici du sommet z de numéro 1. Avec l'orientation du plan défini précédemment, on parcourt la liste $N(t)$ en partant du sommet z, etc.

Ainsi d'après nos hypothèses, le parcours des sommets du graphe de la figure 97 associé à l'arête $s = (z, t)$ est :

$$L(s) = t, b, z_1, z_2, \ldots, z_k, a, 0, z, a, t_1, t_2, t_3, \ldots, t_r, b, 0, z, t, t_r, b_1, \ldots, b_p, z_1, 0, \ldots$$

Le code $\phi(s)$ associé à ce *parcours* est défini par,

$$\phi(s) = 2, 3, 4, 5, \ldots, k{+}3, k{+}4, 0, 1, k{+}4, k{+}5, \ldots, k{+}r{+}4, 3, 0, 1, 2, k{+}r{+}4, k{+}r{+}5, \ldots$$

(b) Supposons $dg(z) > dg(t)$ et $dg(a) > dg(b)$. On commence le parcours sur le brin (z, t), l'orientation du plan étant fixé par le brin (t, a) dans $N(z)$. Le parcours associé à l'arête $s = (z, t)$ est,

$$L(s) = t, a, z_k, \ldots, z_3, z_2, z_1, b, 0, z, b, t_r, \ldots, t_3, t_2, t_1, a, 0, z, t, t_1, a_q, \ldots, a_1, z_k, 0, \ldots$$

Le code associé à ce parcours est,

$$\phi(s) = 2, 3, 4, \ldots, k{+}4, 2, 0, 1, k{+}4, k{+}5, \ldots, k{+}r{+}4, 3, 0, 1, 2, k{+}r{+}4, k{+}r{+}5, \ldots$$

(c) Supposons $dg(z) < dg(t)$ et $dg(a) > dg(b)$. On utilise les même conventions que précédemment. On commence le parcours par le brin (t, z) et l'orientation du plan est fixé par la direction du sommet z vers le sommet a dans $N(t)$. Le parcours associé à l'arête $s = (z, t)$ devient,

$$L(s) = z, t_1, t_2, t_3, \ldots, t_r, b, 0, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_k, a, 0, t, z, z_k, a_1, \ldots, a_q, t_r, 0, \ldots$$

Le code $\phi(s)$ associé à ce parcours est alors,

$$\phi(s) = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, r{+}3, r{+}4, 0, 1, r{+}4, r{+}5, r{+}6, \ldots, r{+}k{+}4, 3, 0, 1, 2, r{+}k{+}4, \ldots$$

On utilise le même procédé pour calculer le code dans les cas restants.

2. Si $(dg(z) = dg(t)$ et $dg(a) \neq dg(b))$, ou $(dg(z) \neq dg(t)$ et $dg(a) = dg(b))$.

   (a) Supposons $dg(z) = dg(t)$ et $dg(a) > dg(b)$. Pour obtenir un code représentatif du carré $s = z, t\ ; a, b$ on calculera deux codes. D'une part un code $\phi(s)$, en partant du brin (z, t) avec une orientation fixée par la direction du sommet t vers le sommet a dans $N(z)$; et d'autre part un code $\phi'(s)$ en partant de l'arc (t, z) avec l'orientation opposée à la précédente.

   (b) Supposons $dg(z) = dg(t)$ et $dg(a) < dg(b)$. Idem que (a) en remplacant a par b et b par a.

   (c) Supposons $dg(z) > dg(t)$ et $dg(a) = dg(b)$. Comme précédement, afin d'obtenir un code représentatif de ce carré s on calculera deux codes. Pour les deux parcours on partira du brin (z, t), mais un code utilisera l'oriention directe et l'autre indirecte.

   (d) Supposons $dg(z) < dg(t)$ et $dg(a) = dg(b)$. Idem que (c) en remplacant z par t et t par z.

3. Supposons $dg(z) = dg(t)$ et $dg(a) = dg(b)$. On doit calculer les quatre codes possibles. C'est-à-dire les deux codes en partant du brin (z, t) avec les deux orientations du plan, et les deux autres codes en partant du brin (t, z) avec les deux orientations du plan.

Finalement et pour résumer, afin de calculer un code représentatif pour un carré $s = z, t\ ; a, b$, par convention on commencera le calcul du code par l'arête (z, t) en partant du sommet de plus grand degré, d'où le calcul de deux codes si $dg(z) = dg(t)$. L'orientation du plan pour décrire le code est fixée suivant le plus grand degré entre $dg(a)$ et $dg(b)$, d'où le calcul de deux codes supplémentaires si $dg(a) = dg(b)$.

On note S l'ensemble des carrés de même nature que s dans le graphe $\Pi(p_i)$ (où Π est soit T soit T'), dans le sens où S correspond à l'ensemble des carrés pouvant être construit par la transformation Π. Par exemple si $\Pi = T$, l'ensemble S sera l'ensemble des carrés $[\ldots]$; si $\Pi = T'$, l'ensemble S désignera l'ensemble des carrés $\langle \ldots \rangle$.

Pour chaque carré $s \in S$ on calcule entre un et quatre codes et on sélectionne son code maximal noté $\Phi(s)$; ce code sera dit le code *représentatif* du carré s. On calcule alors le code maximal Φ du graphe G comme suit,

$$\Phi = \max_{s \in S}(\Phi(s)).$$

Le carré s_i issu du graphe $\Pi(p_i)$ est dit canonique si et seulement si $\Phi(s_i) = \Phi$.

Cette section a donc présenté un procédé d'acceptation ou de rejet d'un graphe $\Pi(p_i)$. Il est basé sur la notion de canonicité du carré s_i associée au chemin p_i, elle-même définie par l'intermédiaire d'un code représentatif de s_i, noté $\Phi(s_i)$.

La technique de codage décrite précédement sera par la suite utilisée sous la forme d'une procédure notée `Code représentatif`(s). Cette procédure ne sera pas écrite dans la mesure où l'on considère avoir été suffisamment explicite dans la présentation du calcul de $\Phi(s)$.

Dans le but d'accélérer le test de la canonicité du carré s_i, on propose de réduire le nombre de carrés pour lesquels il sera necessaire de calculer ϕ. En d'autres termes dans la prochaine section on se propose de réduire $|S|$ avant de vérifier la canonicité du carré s_i.

1.3.2 Un pré-traitement sur l'ensemble des carrés S

Soit S l'ensemble des carrés du graphe $\Pi(p_i)$ de même type que celui de s_i. Avant de réaliser le test de canonicité du carré s_i, on veut réaliser un pré-traitement afin de réduire le nombre de codes $\phi(s)$ à calculer.

Le pré-traitement que l'on propose est basé sur les degrés des quatre sommets z, t, a et b pour tous les carrés de S. On filtre les carrés de l'ensemble S à l'aide de l'algorithme 98.

Entrée : Un ensemble S de carrés $z, t\ ; x, y$.
Sortie : Une réduction de $|S|$.
Nom : **Pré-Traitement** (S)

(1) **Début**
(2) $\zeta \leftarrow \max_{s=z,t\ ;a,b \in S_i}(dg_G(z), dg_G(t))$
(3) $S^1 \leftarrow \{z, t\ ; a, b \in S \mid dg_G(z) = \zeta \text{ ou } dg_G(t) = \zeta\}$
(4) $\eta \leftarrow \min_{s=z,t\ ;a,b \in S^1}(dg_G(z), dg_G(t))$
(5) $S^2 \leftarrow \{z, t\ ; a, b \in S^1 \mid dg_G(z) = \eta \text{ ou } dg_G(t) = \eta\}$
(6) $\theta \leftarrow \max_{s=z,t\ ;a,b \in S^2}(dg_G(a), dg_G(b))$
(7) $S^3 \leftarrow \{z, t\ ; a, b \in S^2 \mid dg_G(a) = \theta \text{ ou } dg_G(b) = \theta\}$
(8) $\vartheta \leftarrow \min_{s=z,t\ ;a,b \in S^3}(dg_G(a), dg_G(b))$
(9) $S^4 \leftarrow \{z, t\ ; a, b \in S^3 \mid dg_G(a) = \vartheta \text{ ou } dg_G(b) = \vartheta\}$
(10) **Retourner** (S^4)
(11) **Fin**

ALG. 98 - *Pré-Traitement sur l'ensemble des carrés S.*

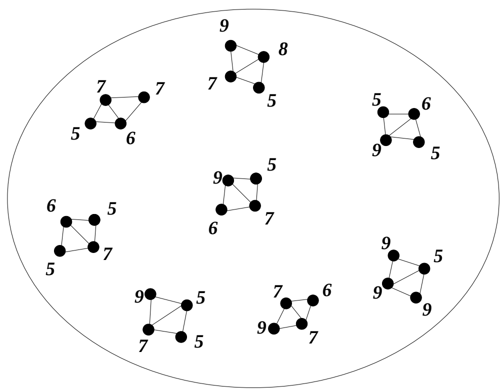

FIG. 99 - *Un graphe $\Pi(p_i)$ et l'ensemble des carrés.*

Exemple On considère le graphe de la figure 99, sur lequel l'ensemble des carrés S a été dessiné. On peut vérifier, qu'à la suite de l'algorithme 98, l'ensemble S^4 contient un unique carré défini par $\zeta = 9, \eta = 5$ et $\theta = 9, \vartheta = 9$. Sans le pré-traitement on aurait dû calculer 12 codes répartis parmi les 8 carrés ; avec ce pré-traitement un seul code sera calculé, d'où un gain d'efficacité.

1.4 Orbites des chemins

Maintenant on va décrire un procédé pour calculer efficacement les orbites du groupe d'automorphisme des chemins $[\ldots]$ et $\langle\ldots\rangle$.

Supposons que pour un graphe $T(p_i)$ (resp. $T'(p_i)$) on trouve deux codes maximaux.

C'est-à-dire que dans l'ensemble S des carrés $[\ldots]$ du graphe $T(p_i)$ (resp. des carrés $\langle\ldots\rangle$ du graphe $T'(p_i)$) il existe exactement deux carrés s_1 et s_2 tels que $\Phi(s_1) = \Phi(s_2) = \Phi$. On note $L(s_1)$ et $L(s_2)$ les deux parcours correspondant aux codes $\Phi(s_1)$ et $\Phi(s_2)$.

Supposons que dans le parcours $L(s_1)$ le sommet x du graphe G prenne le numéro κ, et que dans le parcours $L(s_2)$ ce soit le sommet y qui prenne le numéro κ.

La permutation est simplement une fonction qui assigne y à x et cela pour tout $\kappa \in [1, n]$ où n est l'ordre du graphe G.

Soit α l'automorphisme défini par la permutation entre $L(s_1)$ et $L(s_2)$, tous deux donnant un code maximal Φ. Alors pour tout chemin $[v\ ; a, b]$ (resp. $\langle v\ ; a, b\rangle$) il faut fusionner l'orbite contenant le chemin $[v\ ; a, b]$ (resp. $\langle v\ ; a, b\rangle$) avec l'orbite contenant $[\alpha(v)\ ; \alpha(a), \alpha(b)]$ (resp. $\langle\alpha(v)\ ; \alpha(a), \alpha(b)\rangle$). Une fois réalisées ces fusions pour tous les chemins, les ensembles restants sont les orbites du groupe d'automorphisme des chemins.

Remarque On voit ainsi que selon notre procédé, le calcul des orbites des chemins $[\ldots]$ (resp. $\langle\ldots\rangle$) est dépendant du calcul de la canonicité. Précisement pour calculer les orbites des chemins $[\ldots]$ d'un graphe $T(p_i)$ (resp. des chemins $\langle\ldots\rangle$ d'un graphe $T'(p_i)$), on doit au préalable avoir vérifié et accepté la canonicité du carré s_i ; *i.e.* avoir calculé l'ensemble des codes $\Phi(s)$ des carrés $s \in S$.

En d'autres termes pour calculer les orbites des chemins $[\ldots]$ (resp. $\langle\ldots\rangle$) dans un graphe G, il faut posséder dans celui-ci l'ensemble des parcours qui fournissent un code Φ.

Afin de présenter formellement *le lien* entre le calcul des orbites et celui de la canonicité, on donne l'algorithme 100. On note que cet algorithme ne présente les deux calculs (orbites et canonicité) que pour la transformation $\Pi = T$.

Dans l'algorithme 100 la procédure `numéro`(v, L_j) donne le numéro κ du sommet v dans la numérotation associée au parcours L_j. La procédure `sommet`(κ, L_j) donne le sommet de numéro κ dans la numérotation associée au parcours L_j. L'ensemble $L = \{L_1, \ldots, L_{|S|}\}$ correspond à l'ensemble des parcours fournissant un code égal à Φ.

Entrée : Un graphe $G = T(p_i)$ d'ordre $n \geq 14$, s_i le carré issu de p_i et S l'ensemble des carrés.
Sortie : Les carrés [...] canoniques du graphes G,
Si s_i est canonique, il y a calcul des r orbites des chemins [...] de G.
Nom : `Canonicité et orbites pour` $T(p_i)$

Début
$G \leftarrow T(p_i)$, un graphe $MPG5$, et s_i le carré issu de p_i
/ Calcul de la canonicité du carré s_i */*
Soit S l'ensemble des carrés [...] de G
$S^1 \leftarrow$ `Pré-Traitement` (S)
Si $s_i \notin S^1$ **Alors Retourner**$(\emptyset)$;
Pour $j \leftarrow 1$ **à** $|S^1|$ **Faire**
    $s_j \leftarrow$ `ième carré dans` S^1
    $\Phi_j \leftarrow$ `Code représentatif` (s_j)
Fin Pour
$\Phi \leftarrow \max_{j \in [1, |S^1|]}(\Phi_j)$
Si $(\Phi_i \neq \Phi)$ **Alors Retourner**$(\emptyset)$
$S^2 \leftarrow \{s_j / s_j \in S^1$ et tel que $\Phi_j = \Phi\}$
$L \leftarrow \{L_j / j \in [1, |S^2|]$ et tel que $\Phi_j = \Phi\}$

/ Calcul des orbites des chemins [...] du graphe $T(p_i)$ */*
Soit $P \leftarrow \{p_1, \ldots p_k\}$ */* Ensemble des chemins [...] */*
Soit $O \leftarrow \{O_1, \ldots O_k\}$ où $\forall j \in [1, k]$, $O_j \leftarrow \{p_j\}$
Pour $j \leftarrow 1$ **à** k **Faire**
    Soit $p_j \leftarrow [v\,; a, b]$
    $iv \leftarrow$ `numéro` (v, L_1) ; $ia \leftarrow$ `numéro` (a, L_1) ; $ib \leftarrow$ `numéro`(b, L_1)
    Pour $q \leftarrow 2$ **à** $|S^2|$ **Faire**
        $v' \leftarrow$ `sommet`(iv, L_q) ; $a' \leftarrow$`sommet`(ia, L_q) ; $b' \leftarrow$ `sommet`(ib, L_q)
        Soit O_α l'orbite contenant p_j
        Soit O_β l'orbite contenant le chemin $[v'\,; a', b']$
        Si $O_\alpha \neq O_\beta$ **Alors**
            $O_\alpha \leftarrow O_\alpha \cup O_\beta$
            $O_\beta \leftarrow \emptyset$
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Pour
/ O contient les r orbites des chemins [...] du graphe $T(p_i)$ */*
Fin

ALG. 100 - *Calcul des orbites, calcul de la canonicité pour la transformation T.*

Chapitre 2

Enumérer les graphes A, B et C

Dans ce chapitre on présente l'algorithme 104 destiné à générer tous les graphes $MPG5$ d'ordre n sans répétitions ni test d'isomorphisme.

Dans cet algorithme, la variable s désigne le carré associé au chemin p (après la transformation $T(p)$ ou $T'(p)$) ; il est initialisé par l'appel suivant,

$$\texttt{énumération } MPG5(T(p_0 = [1\ ; 2, 5]), s_0 = (15, 1\ ; 2, 5)),$$

où le chemin $p_0 = [1\ ; 2, 5]$ est défini sur le graphe initial G_0 de la figure 101. On peut remarquer que le graphe G_0 est le graphe $MPG5$ d'ordre 14. Sur la figure 102, on peut voir le graphe $T(p_0)$, ainsi que le carré $s_0 = [15, 1\ ; 2, 5]$ associé à p_0.

L'algorithme principal est décrit dans 104, mais celui qui contrôle l'énumération est défini dans 103.

On va s'attacher à définir les algorithmes de *contrôle* de l'énumération ; c'est-à-dire ceux notés `canonique`$(G, \Pi, s))$ et `Calcul des orbites`$(G, \{p_1, \ldots, p_k\}, L)$. L'algorithme appelé `Application`(G) peut contenir une tâche particulière que l'on veut exécuter sur l'ensemble des graphes $MPG5$ d'ordre n. Par exemple, cet algorithme pourra contenir un

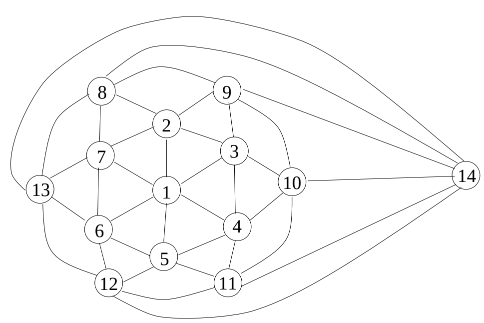

FIG. 101 - *Le graphe G_0.*

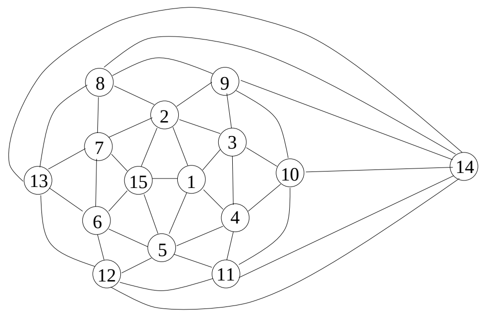

FIG. 102 - *Le graphe $T(p_0)$.*

Entrée : Le graphe $MPG5$ d'ordre 14, la transformation T, le carré $[15, 1\ ; 2, 5]$.
Sortie : L'énumération des graphes $MPG5$ d'ordre n.
Nom : `énumération` $MPG5(G, \Pi, s)$

/* *G est le graphe courant d'ordre $n' \leftarrow$* `Ordre`(G),
  Π est la tranformation T ou T',
  s est le carré développé par la transformation Π dans G */
Début
  Si (($(n' > n)$ **ou** $((s \neq \emptyset)$ **et** $((L \leftarrow$`canonique`$(G,\Pi, s)) = \emptyset)))$ **Alors**
    Retourner()
  Si $(n' = n)$ **Alors** `Application` (G)
  Si $(s \neq \emptyset)$ **Alors**
    Si $(n' > 15)$ **et** $(G = A^T_{min}(n'))$ **Alors**
      `énumération` $MPG5\ (A(n' - 1), \emptyset, \emptyset)$
      Si $(n' = 17 + (q \times 15))$ **ou** $((n' - 1) = 17 + (q \times 15))$ **Alors**
        `énumération` $MPG5(P_1(17 + (q \times 15)), \emptyset, \emptyset)$
      Si $(n' = 20 + (q' \times 9))$ **ou** $((n' - 1) = 20 + (q' \times 9))$ **Alors**
        `énumération` $MPG5(F_1(20 + (q' \times 9)), \emptyset, \emptyset)$
    Liste de cas suivant G
      $G \in R^{\diamond}_1$: `énumération` $MPG5\ (\xi(G), \emptyset, \emptyset)$
      $G \in Z'_1$: `énumération` $MPG5\ (T'(\rho), T', \langle \ldots \rangle)$
      $G \in Z'_2$: `énumération` $MPG5\ (T'(\varrho), T', \langle \ldots \rangle)$
      $G \in C'$:
        $P \leftarrow \{p_1, \ldots, p_k\}$, l'ensemble des chemins $\langle \ldots \rangle$
        $O \leftarrow$ `Calcul des orbites`$(G, \{p_1, \ldots, p_k\}, L)$
        Pour $i \leftarrow 1$ **à** $(r = |O|)$ **Faire**
          $p_i \leftarrow \langle v\ ; x, y \rangle$, un chemin de l'orbite O_i
          `énumération` $MPG5(T'(p_i), T', \langle z, t\ ; x, y \rangle)$
  Sinon
    $L \leftarrow$`automorphismes des graphes`$P_1, F_1, R_1(G)$
  $P \leftarrow \{p_1, \ldots, p_k\}$, l'ensemble des chemins $[\ldots]$
  $O \leftarrow$ `Calcul des orbites`$(G, \{p_1, \ldots, p_k\}, L)$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** $(r = |O|)$ **Faire**
    $p_i \leftarrow [v\ ; x, y]$, un chemin de l'orbite O_i
    `énumération` $MPG5(T(p_i), T, [z, t\ ; x, y])$
Fin

ALG. 103 - *Enumération de $MPG5_n$: Première partie.*

Entrée : Aucune.
Sortie : Enumération des graphes $MPG5$ d'ordre n.
Nom : **Main**

(B1) **Début**
(B2) **Lire** (n)
(B3) `énumération` $MPG5$ $(T(p_0 = [1\ ;2,5]), T, s_0 = (15,1\ ;2,5))$
(B4) **Si** n `MOD` $2 = 0$ **Alors**
(B5) `Application`$(A(n))$
(B6) **Si** $n = 17 + (q \times 15)$ **Alors**
(B7) `Application`$(P_1(n))$
(B8) **Si** $n = 20 + (q' \times 9)$ **Alors**
(B9) `Application`$(F_1(n))$
(B10) **Fin**

ALG. 104 - *Enumération de $MPG5_n$: Seconde partie.*

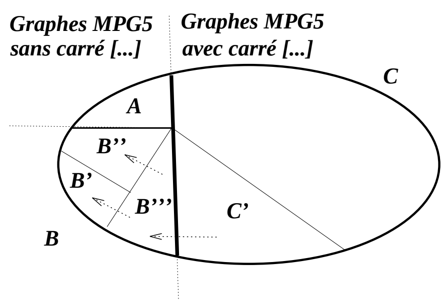

FIG. 105 - *Partition de l'ensemble des graphes $MPG5$.*

algorithme de coloration comme ceux de la bibliographie [W]. Un autre exemple d'application pourrait être plus simplement un compteur pour déterminer $|MPG5_n|$.

Pour montrer que cet algorithme énumère tous les graphes $MPG5$ d'ordre n, on procède par récurrence. Premièrement, il existe un unique graphe $MPG5$ d'ordre 14. Secondement, notre hypothèse de récurrence est que par l'algorithme 103, les graphes $MPG5$ d'ordre n' sont à la fois tous générés et tous non isomorphes. Enfin on doit prouver que par ce même algorithme, les graphes $MPG5$ d'ordre $n'+1$ sont eux aussi, tous construits et tous non isomorphes.

L'ensemble des graphes $MPG5$ a été partitionné en trois sous-ensembles disjoints notés A, B, et C, ainsi on va démontrer que cet algorithme construit tous les graphes A, B et C d'ordre $n'+1$ une et une seule fois.

2.1 Enumérer les graphes A

Par hypothèse les graphes $MPG5$ d'ordre n' sont tous construit et tous non isomorphes.

Par définition, il existe un unique graphe A^T_{min} par ordre impair et aucun pour les ordres pairs.

En conséquence, pour chaque ordre n' impair supérieur à 15, l'algorithme 103 construit une unique fois le graphe A d'ordre $n' - 1$ en utilisant l'algorithme 38. En revanche si n est pair c'est l'algorithme 104 à la ligne $(B5)$ qui construira le graphe A de cet ordre et pas l'algorithme 103.

Ainsi tous les graphes de type A d'ordre inférieur ou égal à n sont construits une et une seule fois.

2.2 Enumérer les graphes C

Les graphes C d'ordre inférieur ou égal à $n' + 1$ sont fabriqués par la transformation T à partir des graphes $MPG5$ d'ordre n'. Ceci est décrit de la ligne $(A27)$ à $(A32)$ dans l'algorithme 103.

Il faut donc s'assurer que pour tous les graphes $MPG5$ d'ordre n', l'algorithme 103 a calculé les orbites des chemins [...].

Par hypothèse les graphes $MPG5$ d'ordre n' sont tous générés et tous non isomorphes. En d'autres termes, tous ces graphes ont été acceptés.

On distingue alors les graphes C, A et B.

1. Les graphes C d'ordre n' sont, dans l'algorithme 103, construits à la ligne (31), d'où $s \neq \emptyset$, et acceptés à la ligne $(A5)$, d'où $L \neq \emptyset$.

   En conséquence l'algorithme 103 déclenchera la procédure `calcul des orbites` (*i.e.* l'algorithme 107), à la ligne $(A28)$ afin de calculer les orbites des chemins [...].

2. Le graphe A d'ordre n' existe si n' est pair ; il est construit à la ligne $(A10)$ d'où $s = \emptyset$. Pour les graphes de type A dans l'algorithme 103, il n'y a aucun contrôle de l'énumération ; ce qui implique qu'il n'y a pas de calcul de codes par la procédure `canonique`... de la ligne $(A5)$. C'est la raison pour laquelle on propose un calcul des orbites des chemins [...] dans tout graphe de type A.

   Soit x et y les deux sommets de degré Δ. On définit le premier voisinage du sommet x par la liste suivante, $N(x) = \{x_1, \ldots, x_\Delta\}$.

Entrée : Un graphe $G \leftarrow \Pi(p_i)$, une transformation T ou T'
le carré s_i issu de p_i.
Sortie : Calcul de la canonicité de s_i :
Si s_i est canonique, l'algorithme retient l'ensemble
des parcours L qui fournissent un code maximal Φ
Sinon rien.
Nom : `Canonique` (G, Π, s_i)

Début
Si $\Pi = T$ **Alors**
  Soit S l'ensemble des carrés $[\ldots]$ de G
Sinon
  Soit S l'ensemble des carrés $\langle \ldots \rangle$ de G tel que [a]
    l'arête $\langle z, t \rangle$ ne distingue pas deux motifs M_3 ou
    un motif M_3 d'un motif M_3^{vide}
$S^1 \leftarrow$ `Pré-Traitement` (S)
Si $s_i \notin S_1$ **Alors Retourner**$(\emptyset)$
Pour $j \leftarrow 1$ **à** $|S^1|$ **Faire**
  $s_j \leftarrow$ `j-ième carré dans` S^1
  $\Phi_j \leftarrow$ `Code représentatif` (s_j)
Fin Pour
$\Phi \leftarrow \max_{j \in [1, |S^1|]}(\Phi_j)$
Si $(\Phi_i \neq \Phi)$ **Alors**
  Retourner$(\emptyset)$
$S^2 \leftarrow \{s_j / s_j \in S^1$ et tel que $\Phi_j = \Phi\}$
$L \leftarrow \{L_j / j \in [1, |S^2|]$ et tel que $\Phi_j = \Phi\}$
Retourner(L)
Fin

[a] Si $\Pi = T'$ on doit, afin de vérifier la canonicité du carré s_i dans le graphe G de type B''', comparer le code $\Phi(s_i)$ avec les codes $\Phi(s)$ où s est un carré pouvant être inséré par la tranformation T'.
Le corollaire 31 indique que les carrés $\langle z, t\ ; \ldots \rangle$ issus d'une transformation T' sont tels que l'arête $\langle z, t \rangle$ ne distingue pas deux motifs M_3 ou un motif M_3 d'un motif M_3^{vide}.

ALG. 106 - *Calcul de canonicité.*

Entrée : Un graphe $G \leftarrow \Pi(p_i)$, l'ensemble des chemins $[\ldots]$ ou $\langle \ldots \rangle$,
et l'ensemble des parcours L de code Φ.
Sortie : L'ensemble O des orbites des chemins $[\ldots]$ ou $\langle \ldots \rangle$.
Nom : `Calcul des orbites`$(G, P \leftarrow \{p_1, \ldots p_k\}, L)$

Début
Si G est de type A **Alors**
    retourner (`Orbites des chemins` $[\ldots]$`d'un graphe A (ordre`(G)`)`)
Soit $O \leftarrow \{O_1, \ldots O_k\}$ où $O_j \leftarrow \{p_j\}$
Pour $j \leftarrow 1$ **à** k **Faire**
    Soit $p_j \leftarrow [v\ ; a, b]$ /* *Car un chemin* $\langle v\ ; a, b\rangle$ *est un chemin* $[v\ ; a, b]$ */
    $iv \leftarrow$ `numéro` (v, L_1) ; $ia \leftarrow$ `numéro` (a, L_1) ; $ib \leftarrow$ `numéro`(b, L_1)
    Pour $q \leftarrow 2$ **à** $|L|$ **Faire**
        $v' \leftarrow$ `sommet`(iv, L_q) ; $a' \leftarrow$`sommet`(ia, L_q) ; $b' \leftarrow$ `sommet`(ib, L_q)
        Soit O_α l'orbite contenant p_j
        Soit O_β l'orbite contenant le chemin $[v'\ ; a', b']$
        Si $O_\alpha \neq O_\beta$ **Alors**
            $O_\alpha \leftarrow O_\alpha \cup O_\beta$
            $O_\beta \leftarrow \emptyset$
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Pour
/* *O contient les r orbites des chemins* $[\ldots]$ */

Alg. 107 - *Calcul des orbites.*

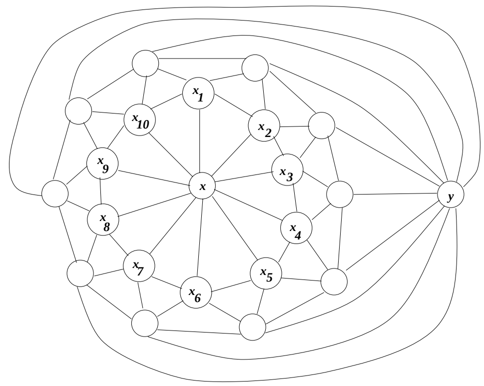

FIG. 108 - *Orbites d'un graphe A.*

En effet, dans l'algorithme 103 (à la ligne ($A30$)) on utilise un unique chemin pour chacune des orbites d'un graphe A. Clairement et sans démonstration l'ensemble O des orbites des chemins [...] d'un graphe de type A est tel que $|O| = \frac{\Delta}{2} - 2$ et

$$\forall i \in [1, |O|], [x\ ; x_1, x_{i+3}] \in O_i.$$

Exemple Le graphe A de la figure 108, contient trois orbites telles que les trois chemins suivants sont répartis dans chacune d'entre elle

$$[x\ ; x_1, x_4], [x\ ; x_1, x_5], [x\ ; x_1, x_6].$$

Ce calcul d'orbites des chemins [...] dans un graphe de type A correspond à la procédure noté (`Orbites des chemins` [...]`d'un graphe A (ordre(`G`)`) utilisé dans l'algorithme 107.

3. Les graphes $B'' = \{Z_1, Z_2\}$.

   (a) Les graphes Z_1 d'ordre n' s'ils existent ont été construits à la ligne ($A17$), d'où $s \neq \emptyset$ et ont été acceptés à la ligne ($A5$), d'où $L \neq \emptyset$.

   En conséquence l'algorithme 103 appelera la procédure `Calcul des orbites` à la ligne ($A28$) pour calculer les orbites des chemins [...].

   (b) Idem pour les graphes Z_2.

4. Les graphes B''' d'ordre n' ont été construits à partir de la ligne ($A20$) donc $s \neq \emptyset$ et ont été acceptés à la ligne ($A5$) donc $L \neq \emptyset$. En conséquence l'algorithme 103

appelera la procédure `Calcul des orbites` à la ligne $(A28)$ pour calculer les orbites des chemins [...].

5. Les graphes B', ont été définis comme étant les graphes F_1, P_1 et R_1. On distingue deux cas.

   (a) Les graphes P_1 et F_1 ont été construits respectivement aux lignes $(A12)$ et $(A14)$, d'où $s = \emptyset$.

   (b) Les graphes R_1 ont été construit à la ligne $(A16)$, d'où $s = \emptyset$.

   Dans l'algorithme 103 ces graphes ne subissent aucun contrôle d'énumération, car les appels `énumération`... sont tels que $s = \emptyset$.

   C'est la raison pour laquelle on intègre un calcul de codes obligatoire pour ces trois types de graphes. On calcule tous les codes des brins (z, t) dont les degrés sont respectivement Δ et 6. La justification de ce choix est que pour tous graphes B' il existe exactement deux sommets de degré Δ ; et que pour chacun d'entre eux il existe un nombre réduit, mais non nul, de voisins de degré 6.

   Une fois les codes calculés, on obtient l'ensemble L des parcours qui fournissent un code Φ. Ce procédé de calcul des automorphismes des graphes P_1, R_1 et F_1 correspond à la procédure notée `automorphismes des graphes`$P_1, F_1, R_1(G)$ dans l'algorithme 103 à la ligne $(A26)$.

   En conséquence l'algorithme 103 appellera la procédure `Calcul des orbites` à la ligne $(A28)$ pour calculer les orbites des chemins [...].

On a donc vérifié que pour tous les graphes $MPG5$ d'ordre n', l'algorithme 103 avait calculé les orbites des chemins [...].

Dès lors pour chaque orbite O_i dans l'algorithme 103, on sélectionne un chemin p_i, à la ligne $(A30)$ et on applique T à la ligne suivante. Le test de canonicité est décrit par l'algorithme 106. Dans cet algorithme appelé à la ligne $(A5)$ de l'algorithme 103 le graphe $T(p_i)$ d'ordre $n'+1$, sera rejeté soit à la ligne (9) si le carré *ne passe pas* le pré-traitement, soit à la ligne (16) si le carré s_i issu de p_i est non canonique.

Précisement on prouve qu'à partir de l'ensemble des graphes $MPG5$ d'ordre n' et de leurs orbites de chemins [...], l'algorithme 103 génère finalement tous les graphes de type C, sans répétition.

Lemme 43 *Tous les graphes C acceptés par l'algorithme 103 sont non isomorphes.*

Preuve

Par induction. Supposons que tous les graphes $MPG5$ avec n' sommets soient non isomorphes. Maintenant on observe les graphes d'ordre $n' + 1$. Par définition des graphes C, à partir de l'ensemble $MPG5_{n'}$, par T on fabrique tous les graphes C d'ordre $n' + 1$. On va montrer que le procédé d'énumération proposé dans l'algorithme 100 ne construit pas deux graphes isomorphes.

– *Par l'absurde.* Supposons que cet algorithme fournisse deux graphes de type C, noté G et G' tous deux acceptés et tous deux isomorphes. On utilise le terme *acceptés*, dans le sens où ils ne sont pas *rejetés* par la ligne (9) ou (16) ; en d'autres termes si on note s et s' les deux carrés dernièrement développés dans respectivement $G = T(p)$ et $G' = T(p')$; s et s' sont canoniques.

  On note $\Phi(s)$ (resp. $\Phi(s')$) le code représentatif du carré s (resp. s') et Φ (resp. Φ') le code maximal sur tous les codes calculés dans le graphe G (resp. G'). Puisque G et G' sont isomorphes cela implique

$$\Phi = \Phi'.$$

  Puisque les deux carrés s et s' sont canoniques, cela implique qu'ils ont tous deux un code représentatif maximal, *i.e.*

$$\Phi(s) = \Phi(s') = \Phi.$$

  Puisque les deux carrés s et s' ont le même code dans un même graphe, cela implique que les deux graphes $G_0 = T^{-1}(s)$ et $G_0' = T^{-1}(s')$ sont isomorphes. Or, par hypothèse d'induction tous les graphes $MPG5$ d'ordre n' sont non isomorphes ; on a donc $G_0 = G_0'$, en d'autres termes, il ne s'agit pas de deux graphes isomorphes, mais du même graphe.

  Mais alors, si G_0 et G_0' sont le même graphe, afin de construire les deux graphes G et G' de façon à ce qu'ils soient isomorphes, on a forcement, par définition d'une orbite, utilisé deux chemins p et p' au sein de la même orbite. En d'autres termes on a forcément appliqué T deux fois dans la même orbite. Il y a contradiction, car dans dans l'algorithme 103 on applique la transformation T exactement une fois par orbite.

$\square$

Lemme 44 *Les graphes de type C sont tous fabriqués.*

Preuve

Par induction. Supposons que par l'algorithme 103 tous les graphes $MPG5$ avec n' sommets soient fabriqués, *i.e.* sans test d'isomorphisme. Clairement tous les graphes C d'ordre $n'+1$ peuvent être construits et énumérés par test d'isomorphisme en utilisant la transformation T.

Soit G un graphe C d'ordre $n'+1$. Par hypothèse ce graphe peut être généré par test d'isomorphisme. De même, dans ce graphe il existe par définition au moins un carré tel que la transformation T^{-1} peut être appliquée.

Soit S l'ensemble des carrés [...] canoniques dans le graphe G. Parmi l'ensemble S, on sélectionne un carré s et on applique $T^{-1}(s)$. On note G_0 le graphe résultant. On calcule les orbites des chemins [...] dans le graphe G_0.

On applique la transformation T sur un chemin p' appartenant à la même orbite que p ; où p est le chemin associé au carré s. On obtient par définition un graphe $G' = T(p')$ isomorphe au graphe G. Le graphe G' sera accepté puisque d'une part p' est dans la même orbite que p et d'autre part le carré s associé à p est connu comme étant canonique. Donc le graphe G est fabriqué par notre procédé. Il n'y a donc pas de graphe C d'ordre $n'+1$ qui ne soit pas fabriqué par l'algorithme 103. □

En conséquence par hypothèse d'induction sur les graphes $MPG5$ d'ordre n', les graphes C d'ordre $n'+1$ fabriqué par l'algorithme 103 d'une part sont tous construit et d'autre part sont tous non isomorphes.

2.3 Enumérer les graphes B'''

Les graphes B''' d'ordre $n'+1$ sont par définition les graphes B accessibles par la transformation T' à partir d'un graphe C d'ordre n'.

Les graphes C et donc C' d'ordre n' ont été construits à la ligne $(A31)$ donc $s \neq \emptyset$, et ont été acceptés à la ligne $(A5)$ donc $L \neq \emptyset$.

En conséquence l'algorithme 103 appellera la procédure `Calcul des orbites` à la ligne $(A21)$ pour calculer les orbites des chemins $\langle \ldots \rangle$ pour chaque graphe C' d'ordre n'.

Pour chaque orbite O_i d'un graphe de type C', on sélectionne un chemin $p_i = \langle \ldots \rangle$ à la ligne $(A23)$ et on applique $T'(p_i)$ à la ligne suivante.

Le test de canonicité est décrit par l'algorithme 106. Dans cet algorithme appelé à la ligne $(A5)$ de l'algorithme 103, le graphe $T'(p_i)$ d'ordre $n'+1$, sera rejeté soit à la ligne

(9) si le carré *ne passe pas* le pré-traitement, soit à la ligne (16) si le carré s_i issu de p_i est non canonique.

Précisement on prouve qu'à partir de l'ensemble des graphes de type C' d'ordre n' et de leurs orbites des chemins $\langle \ldots \rangle$, l'algorithme 103 d'une part génère tous les graphes de type B''' d'ordre $n'+1$, et d'autre part ceux-ci sont tous non isomorphes.

Lemme 45 *Tous les graphes de type B''' acceptés par l'algorithme 103 sont non isomorphes.*

Preuve

Par induction. Supposons que par l'algorithme 103 tous les graphes de type C' avec n' sommets soient non isomorphes. Maintenant on étudie les graphes d'ordre $n'+1$ générés par ce même algorithme. Par définition des graphes B''', ceux-ci sont accéssibles à partir des graphes de type C' par la transformation T'. On va montrer que le procédé d'énumération proposé dans l'algorithme 103 ne construit pas deux graphes de type B''' isomorphes.

– *Par l'absurde.* Supposons que cet algorithme fournisse deux graphes de type B''', notés G et G' tous deux acceptés et tous deux isomorphes. On utilise le terme *acceptés*, dans le sens où $L \neq \emptyset$ à la ligne $(A5)$; c'est-à-dire qu'ils ne sont pas *rejetés* par la ligne (9) ou (16) dans l'algorithme 106. Si on note s (resp. s') le dernier carré développé dans le graphe $G = T'(p)$ (resp. $G' = T'(p')$) alors cela signifie que s et s' sont canoniques.

  On note $\Phi(s)$ (resp. $\Phi(s')$) le code représentatif du carré s (resp. s'), et Φ (resp. Φ') le code maximal sur tous les codes calculés dans le graphe G (resp. G'). Puisque G et G' sont isomorphes cela implique

$$\Phi = \Phi'.$$

  Puisque les deux carrés s et s' sont canoniques, cela implique qu'ils ont tous deux un code représentatif maximal. Cela implique l'égalité suivante,

$$\Phi(s) = \Phi(s') = \Phi.$$

  Puisque les deux carrés s et s' ont le même code dans un même graphe, cela implique que les deux graphes $G_0 = (T')^{-1}(s)$ et $G'_0 = (T')^{-1}(s')$ sont isomorphes. Or, par hypothèse d'induction tous les graphes de type C' d'ordre n' sont non isomorphes ;

on a donc $G_0 = G'_0$, en d'autres termes, il ne s'agit pas de deux graphes isomorphes, mais du même graphe.

Mais alors, si G_0 et G'_0 sont un seul et même graphe, afin de construire les deux graphes G et G' de façon à ce qu'ils soient isomorphes, on a forcément, par définition d'une orbite, utilisé deux chemin p et p' au sein de la même orbite. En d'autres termes on a forcément appliqué T' deux fois dans la même orbite. Il y a contradiction, car dans l'algorithme 103 à la ligne $(A23)$ on applique la transformation T' une seule fois par orbite.

□

Lemme 46 *Les graphes de type B''' sont tous fabriqués.*

Preuve

Par induction. Supposons que par l'algorithme 103 tous les graphes de type C' d'ordre n' soient fabriqués, sans test d'isomorphisme. Clairement tous les graphes B''' d'ordre $n'+1$ peuvent être construits et énumérés par test d'isomorphisme en utilisant la transformation T'.

Soit G un graphe de type B''' d'ordre $n'+1$. Par hypothèse ce graphe G peut être généré par test d'isomorphisme à partir d'un graphe C' d'ordre n'. Donc dans le graphe G, par le corollaire 32, il existe par définition au moins un carré $\langle z, t\ ; a, b\rangle$ tel que l'arête $\langle z, t\rangle$ ne distingue pas deux motifs M_3 ou un motif M_3 d'un motif M_3^{vide}.

On considère dans le graphe G l'ensemble S des carrés $\langle z, t\ ; a, b\rangle$ canoniques tels que l'arête $\langle z, t\rangle$ ne distingue pas deux motifs M_3 ou un motif M_3 d'un motif M_3^{vide}.

Dans l'ensemble S, on sélectionne un carré s et on applique $(T')^{-1}(s)$. On note G_0 le graphe résultant. On calcule les orbites des chemins $\langle \ldots \rangle$ dans le graphe G_0.

On applique la transformation T' sur un chemin p' appartenant à la même orbite que p ; où p est le chemin associé au carré s. On obtient par définition un graphe $G' = T'(p')$ isomorphe au graphe G. Le graphe G' sera accepté puisque d'une part p' est dans la même orbite que p et d'autre part le carré s associé à p est connu comme étant canonique. Donc le graphe G est fabriqué par notre procédé. Il n'y a donc pas de graphe de type B''' d'ordre $n'+1$ qui ne soit pas fabriqué. □

En conséquence par hypothèse d'induction sur les graphes C' d'ordre n', les graphes de type B''' d'ordre $n'+1$ d'une part sont tous construits par l'algorithme 103 et d'autre part sont tous non isomorphes.

2.4 Enumérer les graphes $B' = \{P_1, R_1, F_1\}$

On distingue deux cas.

1. Les graphes P_1 et F_1. La démonstration est similaire à celle des graphes de type A.

   On rappelle que les graphes A^T_{min} sont des graphes de type C ; pour chaque ordre impair il existe un unique graphe de ce type et aucun pour les ordres pairs.

   Les graphes F_1 sont d'ordre $n' = 20 + (q' \times 9)$ (avec $q' \geq 0$) ; en d'autres termes par ordre croissant la parité de ceux-ci alterne. C'est la raison pour laquelle on réalise les deux tests ($n' = 20 + (q' \times 9)$ et $n' - 1 = 20 + (q' \times 9)$) à la ligne ($A13$).

   Enfin dans l'algorithme 103, si $n = 20+(q' \times 9)$ (n est l'ordre des graphes $MPG5$ que l'on souhaite énumérer) alors le graphe F_1 d'ordre n sera construit dans l'algorithme 104 à la ligne ($B9$).

   Ces remarques sont quasi identiques pour l'énumération des graphes P_1.

2. Les graphes R_1.

   Les lemmes 45 et 46 ont montré que l'algorithme 103 construisait d'une part tous les graphes B''' d'ordre $n' + 1$ et d'autre part qu'ils étaient tous non isomorphes.

   Puisque les graphes de type $R_1^{\diamond}$ sont des graphes de type B''' ; ils sont eux aussi énumérés. En conséquence dans l'algorithme 103 les graphes R_1, par la bijection ξ, sont d'une part tous construits et d'autre part une et une seule fois.

2.5 Enumérer les graphes $B'' = \{Z_1, Z_2\}$

Dans l'algorithme 103, les graphes Z_1 (resp. Z_2) sont fabriqués à la ligne ($A17$) (resp. ($A18$)) à partir d'un graphe Z'_1 (resp. Z'_2) donc $s \neq \emptyset$ et acceptés ou rejetés à la ligne ($A5$).

Les graphes de type Z'_1 et Z'_2 sont des graphes B'''.

Par définition il existe un unique chemin ρ dans un graphe Z'_1 (resp. un unique chemin ϱ dans un graphe Z'_2) qui permet de fabriquer un graphe Z_1 (resp. Z_2).

En conséquence pour chaque graphe Z'_1 (resp. Z'_2) on ne considérera qu'une seule orbite contenant un unique chemin ρ (resp. ϱ). Donc l'algorithme 103 n'appellera pas la procédure `Calcul des orbites` à la ligne ($A21$).

Le test de canonicité est décrit par l'algorithme 106. Dans cet algorithme, activé à la ligne ($A5$) de l'algorithme 103, le graphe $T'(\rho)$ de type Z_1 (resp. $T'(\varrho)$ de type Z_2) d'ordre $n' + 1$, sera rejeté soit à la ligne (9) si le carré s_ρ (resp. s_ϱ) *ne passe pas* le pré-traitement, soit à la ligne (16) si celui-ci est non canonique.

Précisement on prouve qu'à partir de l'ensemble des graphes de type B''' d'ordre n', et donc des graphes Z'_1 (resp. Z'_2) l'algorithme 103 d'une part génère tous les graphes de type Z_1 (resp. Z_2) d'ordre $n'+1$, et d'autre part qu'ils sont tous non isomorphes.

Lemme 47 *Tous les graphes de type Z_1 acceptés sont non isomorphes.*

Preuve

Par induction. Supposons que par l'algorithme 103 tous les graphes de type B''' (donc les graphes Z'_1) d'ordre n' soient non isomorphes. Maintenant on observe les graphes d'ordre $n'+1$ générés par ce même algorithme. Les graphes Z_1 sont accéssibles à partir des graphes de type Z'_1 par la transformation T' appliqué sur le chemin ρ. On va montrer que le procédé d'énumération proposé dans l'algorithme 103 ne construit pas deux graphes de type Z_1 isomorphes.

- *Par l'absurde.* Supposons que cet algorithme fournisse deux graphes de type Z_1, notés G et G' tous deux acceptés et tous deux isomorphes. On utilise le terme *acceptés*, dans le sens où $L \neq \emptyset$ à la ligne $(A5)$; c'est-à-dire qu'ils ne sont pas *rejetés* par la ligne (9) ou (16) dans l'algorithme 106. Si on note s_ρ (resp. $s_{\rho'}$) le dernier carré développé dans le graphe $G = T'(\rho)$ (resp. $G' = T'(\rho')$) alors cela signifie que les carrés s_ρ et $s_{\rho'}$ sont canoniques.

  On note $\Phi(s_\rho)$ (resp. $\Phi(s_{\rho'})$) le code représentatif du carré s_ρ (resp. $s_{\rho'}$) et Φ (resp. Φ') le code maximal sur tous les codes calculés dans le graphe G (resp. G'). Puisque G et G' sont isomorphes cela implique

$$\Phi = \Phi'.$$

  Puisque les deux carrés s_ρ et $s_{\rho'}$ sont canoniques, cela implique qu'ils ont tous deux un code représentatif maximal. Cela implique l'égalité suivante,

$$\Phi(s_\rho) = \Phi(s_{\rho'}) = \Phi.$$

  Puisque les deux carrés s_ρ et $s_{\rho'}$ ont le même code dans un même graphe, cela implique que les deux graphes $G_0 = (T')^{-1}(s_\rho)$ et $G'_0 = (T')^{-1}(s_{\rho'})$ de type Z'_1 sont isomorphes. Or, par hypothèse d'induction tous les graphes de type Z'_1 d'ordre n' sont non isomorphes ; on a donc $G_0 = G'_0$, en d'autres termes, il ne s'agit pas de deux graphes isomorphes, mais du même graphe.

Mais alors, si G_0 et G'_0 ne sont qu'un seul et même graphe, afin de construire les deux graphes G et G' de façon à ce qu'ils soient isomorphes, on a forcément, par définition d'une orbite, utilisé deux chemins ρ et ρ' au sein de la même orbite. En d'autres termes on a forcément appliqué T' deux fois dans la même orbite. Il y a contradiction, car il existe un unique chemin ρ par graphe Z'_1, et que l'on applique une seule fois T' sur ce chemin.

□

Lemme 48 *Les graphes de type Z_1 sont tous fabriqués par T'.*

Preuve

Par induction. Supposons que par l'algorithme 103 tous les graphes de type Z'_1 d'ordre n' soient fabriqués, sans test d'isomorphisme. Clairement tous les graphes Z_1 d'ordre $n'+1$ peuvent être construits et énumérés par test d'isomorphisme.

Soit G un graphe de type Z_1 d'ordre $n' + 1$. Par hypothèse ce graphe G peut être généré par test d'isomorphisme à partir d'un graphe Z'_1 d'ordre n'. Donc dans le graphe G, il existe par définition des graphes Z_1 au moins un carré $\langle z, t\ ; a, b\rangle$ tel que l'arête $\langle z, t\rangle$ distingue deux motifs M_3.

On considère dans le graphe G l'ensemble S des carrés $\langle z, t\ ; a, b\rangle$ canoniques tels que l'arête $\langle z, t\rangle$ distingue deux motifs M_3.

Dans l'ensemble S, on sélectionne un carré s et on applique $(T')^{-1}(s)$. On note G_0 le graphe résultant. Ce graphe contient une seule orbite contenant un unique chemin ρ.

On applique la transformation T' sur le chemin ρ. On obtient par définition un graphe $G' = T'(\rho)$ isomorphe au graphe G. Le graphe G' sera accepté puisque d'une part le chemin ρ appartient à une orbite et d'autre part le carré s associé à ρ est connu comme étant canonique. Donc le graphe G est fabriqué par notre procédé. Il n'y a donc pas de graphe de type Z_1 d'ordre $n' + 1$ qui ne soit pas fabriqué. □

La démonstration pour les graphes Z_2 est identique ; il suffit de remplacer dans les deux preuves précédentes le chemin ρ par ϱ, les graphes Z_1 par Z_2, et les graphes Z'_1 par Z'_2. D'autre part les graphes Z_2 sont définit comme étant des graphes constitués de motifs M_3 et M_3^{vide} tel qu'il n'existe pas deux motifs M_3 contigus. Ainsi afin d'adapter la dernière démonstration pour les graphes Z_2, on doit retirer la contrainte *l'arête $\langle z, t\rangle$ distingue deux motifs M_3*. En effet pour les graphes de type Z_2, on doit simplement considérer l'ensemble S des carrés $\langle z, t\ ; a, b\rangle$ canoniques.

En conséquence par hypothèse d'induction sur les graphes Z'_1 et Z'_2 d'ordre n', les graphes de type Z_1 et Z_2 d'ordre $n' + 1$ d'une part sont tous construits par l'algorithme

103 et d'autre part sont tous non isomorphes.

2.6 Conclusion

En supposant que l'algorithme 103 générait tous les graphes $MPG5$ sans répétitions d'ordre n', les précédents lemmes ont montré que ce même algorithme généré toujours sans répétitions tous ceux d'ordre $n' + 1$.

Puisqu'il existe un unique graphe $MPG5$ d'ordre 14, et que ce graphe est le graphe initial (voir l'algorithme 104) appelant l'algorithme 103, ce même algorithme génère donc bien sans répétition tous les graphes $MPG5$ d'ordre $n \geq 14$.

Quatrième partie

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié le problème de la génération des triangulations de la sphère de degré minimum cinq (*i.e.* les graphes $MPG5$). Deux aspects différents de ce problème sont traités : le premier consiste à construire, pour un ordre donné, *un* graphe $MPG5$ aléatoire ; le second, toujours pour un ordre donné, à construire cette fois *tous* les graphes $MPG5$. Dans les deux cas, notre solution est donnée sous la forme d'une série de théorèmes de nature constructiviste (donc orientés vers une implantation informatique). Deux méthodes distinctes sont présentées pour la génération aléatoire ; pour la génération exhaustive, la méthode proposée se caractérise par l'absence de répétitions et de tests d'isomorphisme.

Motivation de ces travaux

Pourquoi s'intéresser à générer les triangulations de la sphère de degré minimum cinq? Essentiellement pour deux raisons :

1. La première, c'est que les graphes $MPG5$ sont les graphes planaires les plus difficiles à 4-colorier et que les seuls algorithmes de génération existant à l'heure actuelle n'autorisent pas de fixer leur ordre.

2. La seconde raison, c'est que le problème de générer toutes les triangulations de la sphère sans répétition ni test d'isomorphisme est ouvert. Si nous ne résolvons pas ce problème dans sa totalité, nous en proposons cependant une solution partielle, à savoir celle du sous-problème consistant à générer, sans répétition ni test d'isomorphisme, tous les $MPG5$.

Résultats présentés

Notre idée de départ était de procéder de manière récurrente, par *expansion*[1]. Plus précisément, pour obtenir tous les graphes $MPG5$ d'ordre n, on génère à partir de celui d'ordre 14 (qui est bien connu et très simple), tous ceux d'ordre 15 ; à partir de ceux-ci, on génère tous ceux d'ordre 16, puis d'ordre 17, et ainsi de suite jusqu'à n. Pour cette expansion, on fait appel à diverses transformations (explosion T d'un sommet en deux sommets, bascule D d'une arête "diagonale") et autres manipulations locales.

La question qui vient immédiatement est de savoir si on atteint ainsi tous les graphes d'ordre n, et non pas une partie seulement. Pour prouver que le procédé fait bien ce que

1. On utilise le terme *expansion* pour intuitivement signifier que l'on génére les graphes $MPG5$ par ordre croissant. En revanche il n'y a aucun rapport avec l'algorithme de G. Marble, D. W. Matula et J. D. Isaacson [MMI72].

l'on attend de lui, on prend le problème dans l'autre sens : partant d'un quelconque $MPG5$ d'ordre n, on démontre que l'on peut progressivement le réduire au graphe $MPG5$ d'ordre 14 en utilisant exclusivement les transformations inverses de celles qui sont utilisées pour l'expansion. On prouve ainsi que tout $MPG5$ d'ordre $n > 14$ est réductible à l'unique $MPG5$ d'ordre 14, donc que l'expansion de ce dernier graphe, convenablement dirigée, aboutit à l'ensemble des triangulations de la sphère de degré minimum 5, ce qui était bien l'objectif que nous nous étions fixé.

Comme nous l'avons dit, ce procédé a nécessité la définition d'un certain nombre de transformations (T, T' et leurs inverses), mais il nous a imposé également de partitionner les $MPG5$ en plusieurs types de graphes (A, B et C) aux propriétés bien particulières :

En effet, à l'étape i de la récurrence, nous avons constaté que le seul emploi de l'explosion T ne permettait d'atteindre qu'une partie des $MPG5$, *i.e.*, ceux comportant un certain type de carré (et que nous avons donc notés C).

Les graphes exempts de tels carrés sont de deux sortes :

- les uns ont une structure extrêmement régulière, ce qui les rend très faciles à construire (nous les avons notés A) ;

- les autres (notés B) posaient un problème.

Il est possible de contourner celui-ci de la façon suivante : d'abord, on montre que dans un graphe B d'ordre n, il existe nécessairement un certain couple λ d'arêtes consécutives (appelé chemin [...]) tel que, si l'on applique l'explosion T à son sommet central, le graphe d'ordre $n+1$ obtenu est une "expansion" d'un certain graphe C par T. Celui-ci, comme on l'a vu, est réductible par T^{-1} à un graphe $MPG5$ d'ordre $n-1$. Donc, à partir d'un graphe B d'ordre n, il est fort possible de se ramener à un graphe $MPG5$ d'ordre $n-1$, mais c'est au prix d'un passage par un graphe d'ordre $n+1$.

Ainsi, cette méthode (issue du corollaire 24) a l'avantage d'une relative simplicité (puisqu'elle ne met en œuvre que deux transformations, l'explosion T et la contraction T^{-1}), mais elle présente un grave inconvénient : pour construire un graphe $MPG5$ quelconque d'ordre n, elle peut nécessiter en effet de passer par la construction d'un certain graphe de type C d'ordre $n+1$. Cela peut sembler rédhibitoire dans le cas d'une énumération exhaustive.

Si l'on veut éviter le passage à $n+1$, il faut étudier en détail les graphes B. La seconde partie de ce mémoire est presque entièrement consacrée à un important travail de formalisation dans ce but : on a dû définir une partition de B (à laquelle on a associé plusieurs procédés de construction spécifiques), une nouvelle transformation (notée T', et qui peut être vue comme une combinaison de l'explosion T et de la bascule D), ainsi qu'une correspondance bijective (notée ξ) entre deux sous-parties de B.

Par rapport à la précédente méthode, celle-ci est donc plus compliquée à comprendre et à mettre en œuvre, mais plus simple en termes d'efficacité (cf. l'algorithme 95).

La solution développée pour répondre au problème de l'énumération exhaustive des $MPG5$ d'ordre n donné, s'appuie sur cette seconde méthode, à laquelle, dans le cadre d'une collaboration avec G. Brinkmann, nous avons injecté divers controles d'énumération, selon le procédé mis au point par B.D. Mckay [McK93] pour la génération sans test d'isomorphisme ni répétition. Ce procédé fait appel à des calculs d'orbites et de formes canoniques. Récursif, il peut être grossièrement décrit de la façon suivante :

Pour chaque graphe G *accepté*, on calcule les orbites de chemins $[\ldots]$ (resp. $\langle\ldots\rangle$). Dans chacune de ces orbites, on sélectionne un chemin p, et on applique $T(p)$ (resp. $T'(p)$). Le graphe $T(p)$ (resp. $T'(p)$) résultant est *accepté* si et seulement si le carré s associé à p est canonique.

Ce dernier algorithme (l'algorithme 103) est présenté dans la troisième partie. Clairement notre procédé d'énumération employé calcule des codes pour chaque graphe de la même manière que ceux employés par les tests d'isomorphisme : mais dans notre cas on n'en compare jamais directement deux pour savoir si oui ou non ils sont isomorphes. C'est la raison pour laquelle on dit que l'on procède sans test d'isomorphisme ni stockage.

En conséquence les résultats de cette thèse résolvent d'une part le problème de fabrication des graphes $MPG5$ pour un ordre n fixé et d'autre part ils répondent partiellement au problème ouvert.

Perspectives : problèmes ouverts

Les problèmes restant à résoudre, sans être exhaustif, pourraient être les suivants :

1. Etudier précisément la complexité de nos trois algorithmes, de manière à juger de l'opportunité de l'introduction de structures de données spécifiques.

2. Réduire le coût du test de canonicité en améliorant son pré-traitement.

3. Programmer la totalité des algorithmes afin d'évaluer expérimentalement leur efficacité. Par exemple il serait intéressant de comparer la rapidité du programme de D. Avis utilisant un filtre pour extraire les $MPG5$, et celle de l'algorithme 103.

4. Etendre l'énumération des graphes $MPG5$, aux graphes $MPG4$ (qui incluent bien entendu les $MPG5$) et $MPG3$ (qui incluent les $MPG4$), de manière à répondre totalement au problème ouvert.

Résumé

La majeure partie de ce travail est consacré à l'étude des triangulations de la sphère de degré minimum cinq, et plus particulièrement à leur génération.

La première partie propose un rappel des notions de base de la théorie des graphes ainsi que de celles relatives aux cartes topologiques. Elle présente ensuite les définitions spécifiques à ce travail.

Dans la seconde partie, nous considérons le problème de générer les graphes $MPG5$ pour un ordre n fixé. Nous présentons d'abord un ensemble de propriétés concernant ces graphes ; puis, à l'aide de ces propriétés, nous développons deux méthodes de génération.

La troisième partie est consacrée à la génération des graphes $MPG5$ sans répétitions, ni test d'isomorphisme. Il s'agit d'adapter la méthode d'énumération sans test d'isomorphisme de B.D. McKay au cas des graphes $MPG5$.

Mots-clés

Degré minimum cinq, Enumération, Génération, Graphes, Isomorphisme, $MPG5$, Planarité, Stockage.

Index

Bibliographie

[AF93] Avis (D.) et Fukuda (K.). – *Reverse Search for enumeration.* – Rapport technique, Institut für Operations Research, ETH Zentrum, CH-8092 Zurich, Switzerland, 1993. Ce rapport peut être obtenu par **ftp** anonyme sur **ifor13.ethz.ch** (129.132.154.13) dans le répertoire **/pub/fukuda/reports** et le fichier **revs9311.ps.gz**.

[AG93] Arnold (A.) et Guessarian (I.). – *Mathématiques pour l'informatique.* – Masson, 1993.

[AH89] Al-Hakim (L.). – Construction properties of plane triangulations. *15th Annual Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 1989.

[AHK77a] Appel (K.), Haken (W.) et Koch (J.). – Every planar map is four colorable. *University of Illinois*, 1977.

[AHK77b] Appel (K.), Haken (W.) et Koch (J.). – Part 1: Discharging. *Illinois J. Math*, vol. 21, 1977, pp. 429–490.

[AHK77c] Appel (K.), Haken (W.) et Koch (J.). – Part 2: Reducibilty. *Illinois J. Math*, vol. 21, 1977, pp. 491–567.

[Aig79] Aigner (M.). – *Combinatorial Theory.* – Springer Verlag, 1979.

[AS86] Archuleta (R.) et Shapiro (H.). – A fast probabilistic algorithm for four-colouring large planar graphs. *Proc. Fall 1986 Joint Computer Conference*, 1986, pp. 595–600.

[Avi94] Avis (D.). – *Generating Rooted Triangulations Without Repetitions.* – Rapport technique n° SOCS-94.2, Mc Gill Montreal, 1994.

[Bau90] Baudon (O.). – *Cabri-graphes, un Cahier de Brouillon Interactif pour la Théorie des Graphes.* – Thèse de PhD, Université Joseph Fourier - Grenoble 1, 1990.

[BD96a] Brinkmann (G.) et Dress (A.W.M.). – A constructive enumeration of fullerenes. *Submitted to J. of Alg.*, 1996.

[BD96b] Brinkmann (G.) et Dress (A.W.M.). – Penthex puzzles: A reliable and efficient top-down approach to fullerene-structure enumeration. *PNAS*, 1996.

[Ber48] Bernhart (A.). – Another reductible edge configuration. vol. 70, 1948, pp. 144–146.

[Ber87] Berge (C.). – *Graphes.* – Gauthier Villars, 1987.

[BETT94] Battista (G. Di), Eades (P.), Tamassia (R.) et Tollis (I.G.). – Algorithms for drawing graphs: an annotated bibliography. – Ce document est disponible par **ftp** anonyme à **wilma.cs.brown.edu**, dans le répertoire **/pub/papers/compgeo/** dans les fichiers **gdbiblio.tex.Z** et **gdbiblio.ps.Z**, 1994.

[BF67] Bowen (R.) et Fisk (S.). – Generation of triangulation of the sphere. vol. 21, 1967, pp. 250–252.

[Bir13] Birkhoff (G.D.). – The reducibility of maps. *Amer. J. Math*, vol. 35, 1913, pp. 114–128.

[BMS95] Brinkmann (G.), McKay (B.D.) et Saager (C.). – The smallest cubic graphs of girth 9. *Combinatorics, Probability and Computing*, vol. 5, 1995, pp. 1–13.

[Bol78] Bollobás (B.). – *Extremal graph theory.* – Academic Press, 1978.

[Bol85] Bollobás (B.). – *Random Graph.* – Academic Press, 1985.

[Bos91] Boswell (S.G.). – Bounds on the number of γ-operation edge substitutions required to transform a maximal planar graph into another. *Australian Journal of Combinatorics*, vol. 4, 1991, pp. 5–24.

[Bri96] Brinkmann (G.). – Fast generation of cubic graphs. *A paraître dans Journal of Graph Theory*, 1996.

[CNS81] Chiba (N.), Nishizeki (T.) et Saito (N.). – A linear 5-coloring algorithm of planar graphs. *In : J. Algorithms*, pp. 317–327.

[Cor75] Cori (R.). – Un code pour les graphes planaires et ses applications. *Société Mathématique de France*, vol. 27, 1975.

[CR72] Cori (R.) et Richard (J.). – Enumération des graphes planaires à l'aide de séries formelles en variables non commutatives. *Discrete Math.*, vol. 2, 1972, pp. 115–162.

[CV81] Cori (R.) et Vauquelin (B.). – Planar maps are well labeled trees. *Can. J. Math.*, vol. 33, n° 5, 1981, pp. 1023–1042.

[DFR93] Deza (A.), Fukuda (K.) et Rosta (V.). – *Wagner's Theorem and combinatorial enumeration of 3-polytopes.* – Rapport technique, Tokyo Institute of Technology, 1993.

[Dil92] Dillencourt (M. B.). – *Polyhedra of Small Order and Their Hamiltonian Properties.* – Rapport technique, University Of California, 1992.

[EAH89] Eggleton (R.B.) et Al-Hakim (L.). – Maximal planar graphs and diagonal operations. *33rd Annual Meeting of the Australian Mathematical Society, Sydney*, 1989.

[Far36] Fary (I.). – On straight lines representation of planar graphs. *Acta Sci. Math. Szeged*, vol. 11, 1936, pp. 229–233.

[FMB95] Fowler (P.W.), Mitchell (D.) et Brinkmann (G.). – Electronic and steric factors in the stability of proto-fullerene hydrocarbons. *The Chemical, Physics of the Fullerenes*, 1995.

[Gif84] Giffin (J.W.). – *Graph theoric techniques for Facilities Layout.* – Thèse de PhD, University of Canterbury, 1984.

[Hal89] Halin (R.). – Some problems and results on infinite graphs. *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 41, 1989, pp. 195–210.

[HDR94a] Hardouin-Duparc (J.) et Rolland (P.). – *Etude expérimentale de générateurs de graphes planaires triangulés et de degrés minimum cinq.* – Rapport technique n° 72, IRIN, Université de Nantes, Ecole Centrale de Nantes, November 1994.

[HDR94b] Hardouin-Duparc (J.) et Rolland (P.). – Maya: a new graph coloring algorithm. *In : Proceedings of the ninth International Symposium on Computer and Information Sciences*, pp. 285–292.

[HDR94c] Hardouin-Duparc (J.) et Rolland (P.). – *Willy : un nouvel algorithme de coloration de graphes.* – Rapport technique n° 70, IRIN, Université de Nantes, Ecole Centrale de Nantes, November 1994.

[HDR95] Hardouin-Duparc (J.) et Rolland (P.). – Transformations for maximal planar graphs with minimum degree five. *In : Computing and Combinatorics.* pp. 366–371. – LNCS 959, Springer Verlag.

[Hea90] Heawood (P.J.). – Map colour theorem. *Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 24, 1890, pp. 332–338.

[Hee69] Heesch (H.). – *Untersuchungen zum Vierfarbenproblem.* – Hochschulskriptum 810/a/b Bibliographisches Institut, Mannheim, 1969.

[HT74] Hopcroft (J.) et Tarjan (R.E.). – Efficient planarity testing. *J. ACM*, vol. 21, n° 4, 1974, pp. 549–568.

[Kem79] Kempe (A. B.). – On the geographical problem of the four colours. vol. 2, 1879, pp. 193–200.

[Kon96] Kong (C.M.). – *Generating Rooted Triangulation With minimum degree four without Repetitions.* – Thèse, School of Computer Science, McGill University, 3480 University, Montréal, Québec, Canada. H3A 2A7, 1996.

[KP95] Kocay (W.) et Pantel (C.), 1995. Le programme est disponible sue le **World Wide Web** dans **http://130.179.24.217//G & G/G & G.html**.

[Leh70] Lehmann (A.B.). – A bijective census of rooted planar maps. *Communication at Ontario Math. Conference*, 1970.

[Lei79] Leighton (F.T.). – A graph colouring algorithm for large scheduling problems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 84, Nov-Dec 1979, pp. 489–505.

[LW92] Lint (J.H. Van) et Wilson (R.M.). – *A course in Combinatorics.* – Cambridge University, 1992.

[McK87] McKay (B.D.), 1987. `NAUTY`: Ce programme peut être obtenu par **ftp** anonyme à **dcs-soft.anu.edu.au** dans le répertoire **/pub/nauty19**.

[McK90] McKay (B.D.). – *Nauty Users Guide.* – Rapport technique, Computer Science Department, Australian National University, 1990.

[McK93] McKay (B.D.). – Isomorph free exhaustive generation. *preprint*, 1993.

[MMI72] Marble (G.), Matula (D.W.) et Isaacson (J.D.). – Graph coloring algorithms. *In : R. C. Read, Graph Theory and Computing, Academic Press, New York*, pp. 108–122.

[Mor] Morgenstern (C.A.). Ce programme peut être obtenu par **WWW** dans **ftp://dimacs.rutgers.edu/pub/challenge/graph/contributed/morgenstern**.

[MS91] Morgenstern (C.A.) et Shapiro (H.D.). – Heuristics for rapidly four-coloring large planar graphs. 1991, pp. 869–891.

[MST81] Matula (D.W.), Shiloach (Y.) et Tarjan (R.E.). – Analysis of two linear-time algorithms for five-coloring a planar graph. *Congr. Numer.*, vol. 33, 1981, p. 401.

[Nin87] Ning (Q.). – On a conjecture of foulds and robinson about deltahedra. *Discrete Appl. Math*, vol. 18, 1987, pp. 305–308.

[Ore67] Ore (O.). – *The four-color problem.* – Academic Press, 1967.

[Rea78] Read (R.C.). – Every one a winner. *Annals Discrete Math.*, vol. 2, 1978, pp. 107–120.

[Rol96] Rolland (P.). – Four coloring for a subset of maximal planar graphs with minimum degree five. – A paraître dans LNCS Springer Verlag.

[RSST96a] Robertson (N.), Sanders (D.), Seymour (P.) et Thomas (R.). – Efficiently four-coloring planar graphs. *Soumis*, 1996.

[RSST96b] Robertson (N.), Sanders (D.), Seymour (P.) et Thomas (R.). – The four-colour theorem. *Soumis*, 1996.

[SK77] Saaty (T.L.) et Kainen (P.C.). – *The four-color problem, assaults and conquest.* – Mc Graw-Hill International Book Company, 1977.

[Ste51] Stein (S.K.). – Convex maps. *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 2, 1951, pp. 464–466.

[SW93] Stamm-Wilbrandt (H.). – *A simple linear time algorithm for embedding maximal planar graphs.* – Rapport technique, Institut für Informatik III, Universität Bonn, 1993. Ce rapport peut être obtenu par **ftp** anonyme sur **ftp.cs.uni-bonn.de** dans le répertoire **/pub/paper/infIII** et dans le fichier **IAI-TR-93-10.ps.Z**.

[TS92] Thulasiraman (K.) et Swamy (M.N.S.). – *Graphs: Theory and algorithms.* – John Wiley & Sons, 1992.

[Tut56] Tutte (W. T.). – A census of planar triangulations. vol. 14, 1956, pp. 21–38.

[Tut68] Tutte (W.T.). – On the enumeration of planar maps. vol. 74, 1968, pp. 64–74.

[W] W. Une bibliographie importante concernant la coloration de graphes peut être trouvé par **World Web Wide** à l'adresse suivante **ftp://dimacs.rutgers.edu/pub/challenge/graph/contributed/culberson/** dans le fichier **color.bib**.

[Wag36] Wagner (K.). – *Bemerkungen zum Vierfarbenproblem.* – Jahresber. Deutsche Math. -Verein., 1936.

[Whi84] White (A.T.). – *Graphs, Groups and Surfaces.* – North Holland, Mathematics Studies 8, 1984.